# 4. L'approximation par des polynômes à coefficients entiers. 

**IV.1)** $\underline{\|T_n^I\|_I = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n}$ avec $\frac{b-a}{4} \in [0,1[$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n = 0$ et il existe $n_0$ tel que $\|T_{n_0}^I\|_I < 1$

On choisit $\underline{p = T_{n_0}^I}$

**IV.2)** On démontre ce résultat par récurrence sur le degré $d_s$ de $s$.

$\underline{\text{Si } d_s < d}$ le résultat est clair avec $n = 0$ $b_0 = s$

$\underline{\text{Si } d_s \geq d}$ on peut écrire $s = q r + b_0(X)$

où $b_0(X) \in \mathbb{R}_{d-1}[X]$ $q \in \mathbb{R}[X]$ (division euclidienne)

$\deg q = d_s - d < d_s$. donc on peut écrire

$$q = \sum_{k=0}^{m} c_k(X)(r(X))^k \qquad c_k \in \mathbb{R}_{d-1}[X].$$

Or a $s = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k(X)(r(X))^k$ avec

$n = m+1$ $b_k = c_{k-1}$ pour $1 \leq k \leq n$.

**IV.3)** $p(X)^k$ est unitaire de degré $kd$, il peut donc s'écrire $\underline{P(X)^k = X^{kd} + R(X)}$ avec $\deg R \leq kd-1$.

D'après IV.2) $R(X)$ peut donc s'écrire

$$R(X) = \sum_{l=0}^{k-1} b_l(X)(p(X))^l.$$

$b_l = \sum\limits_{i=0}^{d-1} c_{i,l} X^i$: le coefficient $c_{(d-1),k-1}$ peut s'écrire $b_{d-1,k-1} + a_{kd-1}$ où $a_{kd-1}$ est entier et $b_{d-1,k-1}$ est dans $[0,1]$ (et même $[0,1[$) (Remarquer aussi que $kd-1 = d-1+(k-1)d$.

On peut donc écrire $\underline{R(X) = b_{d-1,k-1} X^{d-1} (p(X))^{k-1} + a_{kd-1} X^{kd-1} + R_1(X)}$ (9)

avec $\deg R_1 \leq kd-2$.

<u>On itère cette construction</u> jusqu'à ce que le dernier reste $R_k$ soit de degré inférieur ou égal à $m-1$, plus exactement jusqu'à $(i,l) = (0, l_0)$.

On peut alors décomposer ce polynôme en la somme d'un polynôme à coefficients entier et d'un polynômes à coefficient dans $[0,1]$.

En regroupement les termes adéquats on obtient bien

$$\underline{p(X)^k} = \underline{r_k(X)} + \underline{z_k(X)} + \underline{p_k(X)}$$

avec les contraintes imposées par l'énoncé

<u>IV.4)</u> L'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_{d-1}[X]$ dont les coefficients sont dans $[0,1]$ est borné pour $\| \ \|_I$, par exemple par $d \times \max(1, \max_{x\in I} |x|)^{d-1} = M_{d-1}$

On a donc. $\underline{\| r_k(x) \|_I \leq \frac{\| p \|_I^{l_0}}{1 - \| p \|_I} \times M_{d-1}}$, pour tout $k \geq l_0$

$$\left( \| r_k(x) \|_I \leq \sum_{l=l_0}^{+\infty} \| \sum_{i=0}^{d-1} b_{i,l} X^i \|_I \, \| p(x) \|_I^{l} \right)$$

Or $\lim_{l_0 \to +\infty} \frac{\| p \|_I^{l_0}}{1 - \| p \|_I} \times M_{d-1} = 0$.

Il existe donc $l_0$ tel que

$$\underline{\forall k \geq l_0 \quad \| r_k(x) \| \leq \frac{1}{8}}$$

On fixe un tel $l_0$, quitte à le prendre assez grand, on peut supposer de plus, $\underline{\forall k \geq l_0 \quad \| p(x)^k \|_I \leq \| p \|_I^k < \frac{1}{8}}$

L'ensemble $K_{n-1}$ des polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dont les coefficients sont dans $[0,1]$ est bornée, d'après ce qu'on a vu et fermé (car on l'a déjà dit tout fonction coordonnée est continues). <u>Il est donc compact</u>

On peut donc extraire de la suite $r_k(X)$ une suite convergente. $(r_{\varphi(k)}(X))_{k\geq 0}$

Il existe donc un indice $i$ tel que.

$$k' = \varphi(i+i) > k = \varphi(i) \geq l_0$$

et $\| r_{k'} - r_k \|_I < \frac{1}{8}$.

On alors en prenant $q = 3_{k'} - 3_k$

$$q = p^{k'} - p^{k} - r_{k'} + r_k - (r_{k'} - r_k)$$

Donc

$$\|q\|_I \leq \|p^{k'}\|_I + \|p^k\|_I + \|r_{k'}\|_I + \|r_k\|_I + \|r_{k'} - r_k\|$$

$$\|q\|_I \leq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} < 1.$$

De plus $3_{k'}$ est unitaire de degré $k'd$
$3_k$ $kd < k'd$

donc $q$ <u>est unitaire de degré $k'd$ et donc non constant</u>
<u>Il est bien sûr à coefficients entiers</u>.

<u>Rq:</u> au lieu d'utiliser un argument de compacité on aurait pu utiliser le lemme des tiroirs en décomposant $[0,1]$ en $N$ intervalles de longueur $\frac{1}{N}$, et $[0,1]^n$ en $\frac{1}{N^n}$ hypercubes. Deux des $p_k$ doivent avoir les coordonnées dans le même hypercube.

IV 5) - Si $\|p\|_I < 1$, $p$ à coefficients entiers alors

$|p(0)| < 1$ et $p(0) \in \mathbb{Z}$ donc $p(0) = 0$

- Réciproquement, si $P = X$, $\|p\|_I = \max(|a|,|b|) < 1$
et $p$ ne s'annule qu'en $0$, et $p$ est à coefficient entiers.

donc $\boxed{J([a,b]) = \{0\}}$ si $-1 < a < b < 1$.

- Pour la même raison si $p \in \mathbb{Z}[X]$ et $\|p\|_{[-1,1]} < 1$
alors $p(-1) = p(0) = p(1)$

et $p = X^2(1-X^2) \in \mathbb{Z}[X]$ et $\|p\|_{[-1,1]} = \frac{1}{4} < 1$

donc $\boxed{J([-1,1]) = \{-1, 0, 1\}}$

IV. 6) Supposons que $f$ soit limite uniforme de la suite de polynômes $(p_n)_{n\geq 0}$. Soit $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement croissante d'entiers telle que $\forall n$ $\alpha_n d > p_n$ où $d$ est le degré d'un polynôme $q$ à coefficients entiers tel que $\|q\|_I < 1$.

Alors la suite $(q_n)_{n\geq 0}$ ~~est un~~ où $q_n = p_n + q^{\alpha_n}$ est une suite de polynômes unitaires à coefficients entiers qui converge uniformément vers $f$. Il existe donc $n_0$ tel que

$$\forall n \geq n_0 \quad \|q_{n+1} - q_n\|_I < 1.$$

Or $q_{n+1} - q_n$ est unitaire à coefficients entiers, donc

$$\forall x \in J(I) \ \forall n \geq n_0 \quad q_{n+1}(x) = q_n(x)$$

$$\forall x \in J(I) \ \forall n \geq n_0 \quad p_{n+1}(x) = p_n(x) = p_{n_0}(x)$$

$$\forall x \in J(I) \quad f(x) = p_{n_0}(x)$$

IV.7) Soit $\tilde{q}$ un polynôme unitaire à coefficients entiers tel que $\|\tilde{q}\|_I < 1$. $q$ est nécessairement non constant. Il possède donc un ensemble fini de zéros, noté $Z$, avec $J(I) \subset Z$.

Si $Z \neq J(I)$ soit $\{x_1, \; , x_p\} = Z - J(I)$.

Pour chacun des $x_i$ il existe $q_i$ unitaire avec $\|q_i\|_I < 1$ et $q_i(x_i) \neq 0$

Soit $r = \max(\deg q_i)$, alors $\deg \tilde{q}^{r+1} > \deg q_i$ pour tout $i$.

Donc pour tout entier $n$ :

$$\tilde{q}_n = \tilde{q}^{2n(r+1)} + \sum_{i=1}^{p} q_i^{2n}$$ est unitaire de degré $n$ et

$$\lim_{n \to +\infty} \|\tilde{q}_n\|_I = 1.$$

Il existe donc $n_0$ tel que $\|\tilde{q}_{n_0}\|_I < 1$, et $\tilde{q}_{n_0} \in \mathbb{Z}[X]$

$$J(I) \subset Z(\tilde{q}_{n_0}) \subset J(I).$$

Il existe donc $q = \tilde{q}_{n_0}$ dans $\mathbb{Z}[X]$, avec $\|q\|_I < 1$ tel que

$$q(x) = 0 \implies x \in J(I)$$ (on a même équivalence)

IV.8) Soit $p$ dans $\mathbb{R}[X]$. D'après la question IV.2) on peut écrire $p(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i(x)\, q(x)^i$ où $q$ est dans $\mathbb{Z}[X]$ et vérifie $\|q\|_I < 1$.

De plus $\forall i \; b_i \in \mathbb{R}_{d-1}[X]$, où $d = \deg q$.

On peut écrire. $b_i = \tilde{b}_i + \check{b}_i$, où $\tilde{b}_i$ est dans $\mathbb{Z}_{d-1}[X]$

et $\check{b}_i$ est dans $\mathbb{R}_{d-1}[X]$, à coefficients dans $[0,1]$.

On a vu en IV.3 qu'il existe $M_1$ tel que $\forall i \; \|\check{b}_i\|_I \leq M_1$.

On peut donc écrire

$$p(x) = \underbrace{\sum_{i=0}^{m} \tilde{b}_i(x)\, q(x)^i}_{= \tilde{p}(x) \in \mathbb{Z}[X]} + \underbrace{\sum_{i=0}^{m} \check{b}_i(x)\, q(x)^i}_{r(x)}$$

$$\|r\|_I \leq \sum_{i=0}^{m} \|\check{b}_i\|_I \|q\|_I^i \leq \frac{M_1}{1 - \|q\|_I} = M$$

q.e.d.

IV. 9) Soit $x$ dans $J(I)$, $k$ un entier non nul, alors $\frac{f}{q^k}$ est nulle dans un voisinage de $x$, il existe donc une fonction continue $g$ telle que $\forall x \notin J(I)$ $g(x) = \frac{f(x)}{(q(x))^k}$ et ($g(x) = 0$ si $x \in J(I)$).

On applique le théorème de Weierstrass à $g$. Il existe donc $p_1$ dans $\mathbb{R}[X]$ tel que ~~$\| \frac{f}{q^k} - p_1 \|_I \leq 1$~~ $\| g - p_1 \| \leq 1$

D'après la question précédente il existe $\tilde{p}_1$ dans $\mathbb{Z}[X]$ tel que $\| g - \tilde{p}_1 \|_I \leq 1 + M$.

Finalement $\| f - \tilde{p}_1 q^k \|_I \leq (M+1) \| q \|_I^k$

Or $\lim \| q \|_I^k = 0$, donc quitte à prendre $k$ assez grand

$\forall \varepsilon \quad \exists p \in \mathbb{Z}[X]$ $(p = \tilde{p}_1 q^k)$ $\quad \| f - p \|_I < \varepsilon$.

IV. 10) Soit $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\tilde{f}$ continue sur $I$ et telle que ($\forall x$ $q(x) = 0$ $\exists \delta$ $|x - y| < \delta \Rightarrow \tilde{f}(y) = 0$) et $\| f - \tilde{f} \| < \varepsilon$

(En effet il existe $\delta_1$ tel que $\forall x$ $q(x) = 0$ $\forall y$ $|x - y| < \delta_1$ $|f(y)| = |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ on pose $\tilde{f}(y) = 0$ si $|x - y| \leq \delta = \frac{\delta_1}{2}$ et $\tilde{f}$ affine sur $[x + \delta, x + \delta_1]$ et $[x - \delta_1, x - \delta]$).

D'après la question précédente il existe $\tilde{p}$ à coefficients entiers telle que $\| \tilde{f} - \tilde{p} \|_I < \varepsilon$. On a $\| f - \tilde{p} \| < 2\varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tilde{p} \in \mathbb{Z}[X] \quad \| f - \tilde{p} \| < 2\varepsilon$

En choisissant $\varepsilon = \frac{1}{2^{n+1}}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \tilde{p}_n \in \mathbb{Z}[X] \quad \| f - \tilde{p}_n \|_I < \frac{1}{2^n}$.

$f$ est bien limite uniforme d'une suite de polynômes de $\mathbb{Z}[X]$

IV.11) La condition est nécessaire d'après la question IV.6)

Réciproquement, s'il existe $p$ à coefficients entiers tel que $\forall x \in J(I)$ $f(x) = p(x)$, alors $g = f - p$ vérifie les hypothèses de la question précédente, donc $g$ est limite uniforme de la suite de polynômes $(p_n)_{n\geq 0}$. $f$ est alors limite uniforme sur $I$ de la suite de polynômes à coefficients entiers $(p+p_n)_{n\geq 0}$

IV.12) On a vu en IV.5 que $J([-1,1]) = \{-1, 0, 1\}$.

Donc $f$ dans $\mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ est limite uniforme de polynômes à coefficients entiers ssi il existe $p \in \mathbb{Z}[X]$ tel que

$$p(-1) = f(-1) \qquad p(0) = f(0) \qquad p(1) = f(1).$$

Ceci implique $(f(-1), f(0), f(1)) \in \mathbb{Z}^3$ et $f(1) - f(-1) \in 2\mathbb{Z}$.

(car si $p = \sum_{i \geq 0} a_i X^i$ $p(1) - p(-1) = 2\left(\sum_{i\geq 0} a_{2i+1}\right)$ )

Réciproquement : Supposons $(f(-1), f(0), f(1)) \in \mathbb{Z}^3$ et $f(1) - f(-1) \in 2\mathbb{Z}$

( c'est-à-dire $f(1)$ et $f(-1)$ de même parité).

Alors le polynôme d'interpolation de Lagrange

$$p = f(1)\,\frac{X(X+1)}{2} + f(0)\,\frac{X^2-1}{-1} + f(-1)\,\frac{X(X-1)}{2}$$

$$p = \left(\frac{f(1)+f(-1)}{2} - f(0)\right)X^2 + \frac{f(1)-f(-1)}{2}\,X + f(0)$$

est à coefficients dans $\mathbb{Z}[X]$ et vérifie

$$p(0) = f(0) \qquad p(1) = f(1) \qquad p(-1) = f(-1)$$