ENS MPI 2018 Mathématiques D

I. Existence et unicité d'une meilleure approximation.

I.1) $\| \|_I$ est 1-lipschitzienne donc continue. Il en est donc aussi de même de $\varphi : g \mapsto \| f-g\|_I$. $C = \varphi^{-1}([0, 1+m])$, image réciproque d'un fermé est donc fermé.

- De plus $\forall g \in C$ $\|g\| \leq \|f-g\| + \|f\| \leq 1 + m + \|f\|$

Donc C est borné

C est fermé et borné, $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, donc C est compact. De plus $C \neq \emptyset$ car $1+m > m$, donc d'après la caractérisation de la borne ~~sup~~ inférieure il existe g tel que $\|f-g\| \leq 1+m$.

I.2) C est compact, non vide et φ est continue, donc φ atteint un minimum sur C. De plus $\min\limits_C \varphi \leq 1+m$ et $\forall g \notin C$ $\|f-g\| > 1+m$.

Donc $\min\limits_C g = \min\limits_{\mathbb{R}_n[X]} g = \inf\limits_{\mathbb{R}_n[X]} g = m$.

et par conséquent $m = \|f-p\|$ pour un p dans $\mathbb{R}_n[X]$

I.3) On peut prendre par exemple pour q le polynôme d'interpolation de Lagrange.

$$\boxed{q = \sum_{j=1}^{k} f(x_j) \prod_{i \neq j} \frac{(X-x_i)}{(x_j - x_i)}}$$

I.4) $f-q$ est continue en chaque x_i, donc pour $\varepsilon > 0$, pour tout i, il existe $\delta_i > 0$ tel que $\forall x$ $|x - x_i| < \delta_i$ $|(f-q)(x) - (f-q)(x_i)| < \varepsilon$

Or $(f-q)(x_i) = 0$. Donc $\forall x$ $|x - x_i| < \delta_i$ $|f(x) - q(x)| < \varepsilon$.

Il suffit alors de prendre $\boxed{\delta = \min\limits_{1 \leq i \leq k} \delta_i > 0}$

I.5) On écrit $f(x) = (1-t)f(x) + t f(x)$

Si $x \in U_\delta$ $\quad |f(x) - P_t(x)| \leq (1-t)|f(x) - p(x)| + t|f(x) - q(x)|$

$$\leq (1-t)\|f-p\|_I + t \sup_{x \in U_\delta} |f(x) - q(x)|$$

$$|f(x) - P_t(x)| \leq (1-t)m + t\varepsilon$$

Si $x \notin U_\delta$

$$|f(x) - P_t(x)| = |f(x) - p(x) + t(p(x) - q(x))|$$

$$\leq |f(x) - p(x)| + t|p(x) - q(x)|$$

$$\leq \sup_{y \notin U_\delta} |f(y) - p(y)| + t\|p-q\|_I$$

$$|f(x) - P_t(x)| \leq \sup_{y \in I - U_\delta} |f(y) - p(y)| + t\ell.$$

I.6) On choisit $\varepsilon = \frac{m}{2}$. On choisit un δ associé

U_δ est un ouvert de I, donc $I - U_\delta$ est un compact qui ne contient aucun des x_i. Donc $\forall x \in I - U_\delta$ $|f(x) - p(x)| < m$. $\sup_{y \in I - U_\delta} |f(y) - p(y)| = m_0 < m$ est atteint (On peut choisir δ assez petit pour que $I - U_\delta \neq \emptyset$). On choisit ensuite t_0 tel que $t_0 \ell + m_0 < m$ (il suffit de le prendre assez petit).

Finalement $\|f - P_{t_0}\|_I \leq \max(m - t_0(m-\varepsilon), t_0\ell + m_0) < m$.
Ceci est contraire à la définition de m.
Par contraposée $\quad \mathrm{Card}\{x, |f(x) - p(x)| = m\} \geq n+2$

I.7) On a: $m \leq \left\| f - \left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right)\right\|_I = \left\| \frac{f-p_1}{2} + \frac{f-p_2}{2}\right\|_I \leq \frac{1}{2}\|f - p_1\|_I + \frac{1}{2}\|f - p_2\|_I = m$.

Donc $\left\|f - \frac{p_1+p_2}{2}\right\|_I = m$. D'après I.6) il existe donc $(n+2)$ x_k distincts tels que $\left|f(x_k) - \frac{p_1(x_k) + p_2(x_k)}{2}\right| = m = \sup_{x \in I} \left|f(x) - \frac{p_1(x) + p_2(x)}{2}\right| = \sup_{x \in I} |f(x) - p_i(x)|$

$$m = \left|f(x_k) - \frac{p_1(x_k) + p_2(x_k)}{2}\right| = \left|\frac{f(x_k) - p_1(x_k)}{2} + \frac{f(x_k) - p_2(x_k)}{2}\right| \leq \underbrace{\left|\frac{f(x_k) - p_1(x_k)}{2}\right|}_{\leq m} + \underbrace{\left|\frac{f(x_k) - p_2(x_k)}{2}\right|}_{\leq m} \leq m$$

On doit donc avoir $\forall k$ $\frac{f(x_k) - p_1(x_k)}{2} = \frac{f(x_k) - p_2(x_k)}{2} = \pm m$

$\forall k$ $p_1(x_k) = p_2(x_k)$ $\quad$ p_1 et p_2 sont égaux en $n+2$ valeurs donc $p_1 = p_2$

2. Capacité du compact.

II.1) On remarque que $\inf_P \|P\|_K = \inf_{R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]} \|f - R\|_K$ où $f(x) = x^n$:

le résultat se déduit alors du résultat de I.1) et I.2) où on a seulement utilisé que I était compact et non vide.

Si $K = [a, b]$ $a < b$, l'unicité de q résulte de I.7.

II.2) Soit $\varepsilon > 0$ (ou $A \in \mathbb{R}^{*+}$), et choisissons m tel que

$l_m < l + \frac{\varepsilon}{2}$ (si $l \in \mathbb{R}$ (ou $l_m < -(A+1)$ si $l = -\infty$).

Commençons par remarquer que tout tout $q \in \mathbb{N}^*$ et tout m de $\mathbb{N}^*$ $l_{qm} \leq l_m$ (s'établit par récurrence sur q).

Soit $p > m$ $p = qm + r$ avec $r \in [1, m]$ et $q \in \mathbb{N}^*$

donc $$l_p \leq l_r \frac{r}{qm+r} + \underbrace{l_{qm}}_{\leq l_m} \underbrace{\frac{qm}{qm+r}}_{\leq 1}$$

$$\boxed{l_p \leq l_m + l_r \frac{r}{qm+r}}.$$

Or r ne prend qu'un nombre fini de valeurs (m est fixé)

et $\lim_{p \to +\infty} q = +\infty$ donc $\lim_{p \to +\infty} l_r \frac{r}{qm+r} = 0$

Par conséquent $\exists p_0$ $\forall p \geq p_0$ $l_r \frac{r}{qm+r} < \frac{\varepsilon}{2}$ (si $l \in \mathbb{R}$)
< 1 (si $l = -\infty$)

et finalement $\forall p \geq p_0$

$l \leq l_p \leq l + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = l + \varepsilon$ (si $l \in \mathbb{R}$)

$l_p \leq -(A+1) + 1 = -A$ (si $l = -\infty$).

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists p_0$ $\forall p \geq p_0$ $|l_p - l| < \varepsilon$ i.e $\lim_{p \to +\infty} l_p = l$. (même résumé si $l = -\infty$)

II.3) Si q_n unitaire est tel que $\|q_n\|_K = t_n$, alors pour m et n dans $\mathbb{N}^*$ $q_n q_m$ est unitaire et dans $\mathbb{R}_{n+m}$ donc

$$\boxed{t_{n+m} \leq \|q_n q_m\|_K \leq \|q_n\|_K \|q_m\|_K \leq t_n t_m.}$$

Or $\forall p$ $t_p > 0$ car $q_p \neq 0$ puisque unitaire.

En passant au logarithme.

$$\ln t_{n+m} \leq \ln t_n + \ln t_m$$

$$(n+m) \ln t_{n+m}^{\frac{1}{n+m}} \leq n \ln t_n^{\frac{1}{n}} + m \ln t_m^{\frac{1}{m}}.$$

$$\boxed{\ln t_{n+m}^{\frac{1}{n+m}} \leq \frac{n}{n+m} \ln t^{\frac{1}{n}} + \frac{m}{n+m} \ln t^{\frac{1}{m}}.}$$

D'après la question précédente $\left(\ln t_n^{\frac{1}{n}}\right)_{n \geq 0}$ est convergente dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.. En repassant à l'exponentielle

$$\underline{d_1(K) = \lim_{n \to +\infty} t_n^{\frac{1}{n}} \text{ existe dans } \mathbb{R}^+}.$$

II.4) Soit $(x_1, \quad , x_{n+1}) \in K^{n+1}$.

$$\left(\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} |x_i - x_j|\right)^n = \prod_{k=1}^{n+1} \underbrace{\left(\prod_{1 \leq i < k < j \leq n+1} |x_j - x_i|\right)}_{\leq w_n} \leq w_n^{n+1}.$$

En passant à la borne supérieure

$$w_{n+1}^{n} \leq w_n^{n+1}$$

$$w_{n+1}^{\frac{2}{n(n+2)}} \leq w_n^{\frac{2}{2(n-1)}}$$

$\underline{\left(w_n^{\frac{2}{n(n-1)}}\right)_{n \geq 2} \text{ est une suite décroissante positive.}}$

$\underline{\text{elle possède donc une limite } d_2(K)}$

II.5) K est compact donc K^n est compact, puisque $\theta_n : (x_1, \quad , x_n) \longmapsto \prod_{1\leq i<j\leq n} |x_i - x_j|$ est continue elle atteint donc son maximum sur K^n (qui n'est pas vide).

Soit $(x_1, \quad , x_n)$ tel que $w_n = \prod_{1\leq i<j\leq n} |x_i - x_j|$.

Soit $q = \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$, unitaire et dans $\mathbb{R}_n^*[X]$.

Or a $\|q\|_K = |q(x_{n+1})|$, pour un x_{n+1}.. et $\|q\|_K \geqslant t_n$

Or a

$$\boxed{t_n \, w_n \leq \|q\|_K \, t_n = \prod_{1\leq i<j\leq n+1} |x_i - x_j| \leq w_{n+1}}$$

et par conséquent $\boxed{t_n \leq \dfrac{w_{n+1}}{w_n}}$ ($w_n > 0$ car K contient toujours au moins n éléments)

II.6) On a vu que w_{n+1} était réalisé par au moins un $(n+1)$-uplet $(x_1, \quad , x_{n+1})$.

Dans ce cas $w_{n+1} = |V_{n+1}(x_1, \quad , x_{n+1})|$ où V est le déterminant de Vandermonde $\det \begin{pmatrix} 1 & & x_1^n \\ & & \\ 1 & & x_{n+1}^n \end{pmatrix}$.

Mais si p est unitaire de degré n.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1^{n-1} & p(x_1) \\ & & \\ 1 & x_{n+1}^{n-1} & p(x_{n+1}) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1^{n-1} & x_1^n \\ & & \\ 1 & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

(En soustrayant à la colonne C_{n+1} la combinaison $\sum_{i=0}^{n-1} a_i C_{i+1}$ si $p = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$).

$$w_{n+1} = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & x_1^{n-1} & p(x_1) \\ & & \\ 1 & x_{n+1}^{n-1} & p(x_{n+1}) \end{pmatrix} \right|$$

On choisit pour p le polynôme tel que $\|p\|_K = t_n$.

et on développe le déterminant par rapport à la dernière colonne.

$$w_{n+1} = \left| \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1+k} \, V(x_1, \hat{x}_k, , x_{n+1}) \, p(x_k) \right|$$

$$\underline{w_{n+1}} \leq \sum_{k=1}^{n+1} |V(x_1, \hat{x}_k, , x_{n+1})| \, |p(x_k)| \leq (n+1) w_n \, t_n$$

($\hat{x}_k$ veut dire que l'on enlève x_k de la famille $(x_1, , x_{n+1})$ pour obtenir une famille de n éléments)

II.7) Placer ici la démonstration du théorème / lemme de Cesàro, qui fait nécessairement partie de votre bagage.

II.8) D'après II.3 $d_1(K) = \lim_{n \to +\infty} t_n^{\frac{1}{n}}$.

Considérons la suite. $\left(\ln t_1^{\frac{1}{1}}, \ln t_2^{\frac{1}{2}}, \ln t_2^{\frac{1}{2}}, \underbrace{\ln t_k^{\frac{1}{k}}, \dots, \ln t_k^{\frac{1}{k}}}_{k \text{ fois}}, \dots \right)$

elle converge vers $\ln d_1(K)$, donc.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k \ln t_k^{\frac{1}{k}}}{\sum_{k=1}^{n} k} = \ln d_1(K) \quad (\in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$$

en toute rigueur il faut utiliser Cesàro dans le cas $u = -\infty$)

On en déduit en repassant à l'exponentielle

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} t_k \right)^{\frac{2}{n(n+1)}} = d_1(K)$$

Or d'après 2.5 et 2.6

$$\frac{1}{t_1^{\frac{2}{n(n+1)}}} \left(\prod_{k=1}^{n} t_k \right)^{\frac{2}{n(n+1)}} \leq \left(\frac{w_{n+1}}{w_2} \right)^{\frac{2}{n(n+1)}} \leq \frac{1}{t_1^{\frac{2}{n(n+1)}}} \underset{(n+1)!}{\underset{\|}{\left(\prod_{k=2}^{n+1} k \right)^{\frac{2}{n(n+1)}}}} \left(\prod_{k=1}^{n} t_k \right)^{\frac{2}{n(n+1)}}$$

le lemme des gendarmes et la formule de Stirling $\left((n+1)! = e^{(n+1)\ln(n+1) + O(n+1)} \right)$

donnent $\underline{d_1(K) = d_2(K)}$

3. Polynômes de Tchebychev

III.1), III.2) et III.3) Voir la correction du premier devoir maison (Exercice classique à maîtriser).

III.4) L'application $\tau : P \mapsto \left(\frac{2}{b-a}\right)^n P\left(\frac{b-a}{2}X + \frac{b+a}{2}\right)$ est une bijection de l'ensemble des polynômes unitaires de degré n (que nous noterons dorénavant U_n) sur lui-même et

$$\|\tau(P)\|_I = \|P\|_{[a,b]}.$$

Il en résulte que $\boxed{T_n^{[a,b]} = \tau^{-1}(T_n^I) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^n T_n\left(\frac{2Y-b-a}{b-a}\right)}$

et $\boxed{\|T_n^{[a,b]}\|_{[a,b]} = \frac{(b-a)^n}{2^n}\|T_n^I\|_I = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n}$

III.5) On peut écrire $p = c\,p_1$ avec $c \in \mathbb{Z}^*$ (donc $|c| \geq 1$) et p_1 unitaire de degré $d \geq 1$.

On a $\|p\|_I = |c|\,\|p_1\|_I \geq 1 \times 2 \times \left(\frac{b-a}{4}\right)^d \geq 2$.

III.6) Si f est la limite uniforme sur I de la suite $(p_k)_{k \geq 0}$ de polynômes, alors

$$\lim_{k \to +\infty} \|p_{k+1} - p_k\|_I = 0.$$

(car $\|p_{k+1} - p_k\|_I \leq \|p_{k+1} - f\|_I + \|f - p_k\|_I$)

Donc $\underline{\exists k_0 \ \forall k \geq k_0 \quad \|p_{k+1} - p_k\|_I < 2.}$

D'après la question précédente cela implique

$\underline{\exists k_0 \ \forall k \geq k_0} \quad \underline{p_{k+1} = p_k = p_{k_0}}.$

Par conséquent $\boxed{f = p_{k_0}}$ est un polynôme à coefficients entiers.

4. L'approximation par des polynômes à coefficients entiers.

IV.1) $\underline{\| T_n^I \|_I = 2 \left(\frac{b-a}{4} \right)^n}$ avec $\frac{b-a}{4} \in [0, 1[$.

Donc $\lim_{n \to +\infty} 2 \left(\frac{b-a}{4} \right)^n = 0$ et il existe n_0 tel que $\| T_{n_0}^I \|_I < 1$

On choisit $\underline{p = T_{n_0}^I}$

IV.2) On démontre ce résultat <u>par récurrence</u> sur le degré d_s de s.

<u>Si $d_s < d$</u> le résultat est clair avec
$n = 0$ $\quad b_0 = s$

<u>Si $d_s \geq d$</u> on peut écrire $s = q r + b_0(X)$
où $b_0(X) \in \mathbb{R}_{d-1}[X]$ $\quad q \in \mathbb{R}[X]$ (division euclidienne)

$\deg q = d_s - d < d_s$. donc on peut écrire

$$q = \sum_{k=0}^{m} c_k(X) (r(X))^k \qquad c_k \in \mathbb{R}_{d-1}[X].$$

On a $\displaystyle s = \sum_{k=0}^{n} b_k(X) (r(X))^k$ avec

$n = m + 1$ $\quad b_k = c_{k-1}$ pour $1 \leq k \leq n$.

IV.3) $p(X)^k$ est unitaire de degré kd, il peut donc s'écrire $\underline{p(X)^k = X^{kd} + R(X)}$ avec $\deg R \leq kd - 1$.

D'après IV.2) $R(X)$ peut donc s'écrire

$$R(X) = \sum_{l=0}^{k-1} b_l(X) (p(X))^l.$$

$b_l = \sum_{i=0}^{d-1} c_{i,l} X^i$. le coefficient $c_{(d-1), k-1}$ peut s'écrire $b_{d-1, k-1} + a_{kd-1}$ où a_{kd-1} est entier et $b_{d-1, k-1}$ est dans $[0, 1]$ (et même $[0, 1[$) (Remarquer aussi que $kd - 1 = d - 1 + (k-1) d$.

On peut donc écrire $\underline{R(X) = b_{d-1,k-1} X^{d-1} (p(X))^{k-1} + a_{kd-1} X^{kd-1} + R_1(X)}$ (9)

avec $\deg R_1 \leq kd-2$.

<u>On itère cette construction</u> jusqu'à ce que le dernier reste R_k soit de degré inférieur ou égal à $m-1$, plus exactement jusqu'à $(i, l) = (0, l_0)$.

On peut alors décomposer ce polynôme en la somme d'un polynôme à coefficients entier et d'un polynômes à coefficient dans $[0,1]$.

En regroupement les termes adéquats on obtient bien

$$\underline{p(X)^k} = \underline{r_k(X)} + \underline{z_k(X)} + \underline{p_k(X)}$$

avec les contraintes imposées par l'énoncé

<u>IV.4)</u> L'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_{d-1}[X]$ dont les coefficients sont dans $[0,1]$ est borné pour $\| \ \|_I$, par exemple par $d \times \max(1, \max_{x \in I} |x|)^{d-1} = M_{d-1}$

On a donc $\underline{\| r_k(x) \|_I \leq \dfrac{\| p \|_I^{l_0}}{1 - \| p \|_I} \times M_{d-1}}$, pour tout $k \geq l_0$

$$\left(\| r_k(x) \|_I \leq \sum_{l=l_0}^{+\infty} \| \sum_{i=0}^{d-1} b_{i,l} X^i \|_I \, \| p(x) \|_I^l \right)$$

Or $\displaystyle \lim_{l_0 \to +\infty} \frac{\| p \|_I^{l_0}}{1 - \| p \|_I} \times M_{d-1} = 0$.

Il existe donc l_0 tel que

$$\underline{\forall k \geq l_0 \quad \| r_k(x) \| \leq \frac{1}{8}}$$

On fixe un tel l_0, quitte à le prendre assez grand, on peut supposer de plus, $\underline{\forall k \geq l_0 \quad \| p(x)^k \|_I \leq \| p \|_I^k < \frac{1}{8}}$

L'ensemble K_{n-1} des polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dont les coefficients sont dans $[0,1]$ est bornée, d'après ce qu'on a vu et fermé (car on l'a déjà dit toute fonction coordonnée est continue). Il est donc compact

On peut donc extraire de la suite $r_k(X)$ une suite convergente. $(r_{\varphi(k)}(X))_{k\geq 0}$

Il existe donc un indice i tel que

$$k' = \varphi(i+1) > k = \varphi(i) \geq k_0$$

et $$\| r_{k'} - r_k \|_I < \frac{1}{8}.$$

On a alors en prenant $q = z_{k'} - z_k$

$$q = p^{k'} - p^{k} - r_{k'} + r_k - (r_{k'} - r_k)$$

Donc

$$\|q\|_I \leq \|p^{k'}\|_I + \|p^{k}\|_I + \|r_{k'}\|_I + \|r_k\|_I + \|r_{k'} - r_k\|$$

$$\|q\|_I \leq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} < 1.$$

De plus $z_{k'}$ est unitaire de degré $k'd$

z_k ______ $kd < k'd$

donc q est unitaire de degré $k'd$ et donc non constant

Il est bien sûr à coefficients entiers.

Rq: au lieu d'utiliser un argument de compacité on aurait pu utiliser le lemme des tiroirs en décomposant $[0,1]$ en N intervalles de longueur $\frac{1}{N}$, et $[0,1]^n$ en $\frac{1}{N^n}$ hypercubes. Deux des p_k doivent avoir les coordonnées dans le même hypercube.

IV 5). Si $\|p\|_I < 1$, p à coefficients entiers alors

$|p(0)| < 1$ et $p(0) \in \mathbb{Z}$ donc $p(0) = 0$

- Réciproquement, si $P = X$, $\|p\|_I = \max(|a|, |b|) < 1$
et p ne s'annule qu'en 0, et p est à coefficient entiers.

donc $\boxed{J([a, b]) = \{0\}}$ si $-1 < a < b < 1$.

- Pour la même raison si $p \in \mathbb{Z}[X]$ et $\|p\|_{[-1,1]} < 1$
alors $p(-1) = p(0) = p(1)$

et $p = X^2(1 - X^2) \in \mathbb{Z}[X]$ et $\|p\|_{[-1,1]} = \frac{1}{4} < 1$

donc $\boxed{J([-1, 1]) = \{-1, 0, 1\}}$

IV. 6) Supposons que f soit limite uniforme de la suite de polynômes $(p_n)_{n \geq 0}$. Soit $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ une suite strictement croissante d'entiers telle que $\forall n \quad \alpha_n d > p_n$ où d est le degré d'un polynôme q à coefficients entiers tel que $\|q\|_I < 1$.

Alors la suite $(q_n)_{n \geq 0}$ ~~est~~ où $q_n = p_n + q^{\alpha_n}$ est une suite de polynômes unitaires à coefficients entiers qui converge uniformément vers f. Il existe donc n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0 \quad \|q_{n+1} - q_n\|_I < 1.$$

Or $q_{n+1} - q_n$ est unitaire à coefficients entiers, donc

$$\forall x \in J(I) \ \forall n \geq n_0 \quad q_{n+1}(x) = q_n(x)$$

$$\forall x \in J(I) \ \forall n \geq n_0 \quad p_{n+1}(x) = p_n(x) = p_{n_0}(x)$$

$$\forall x \in J(I) \quad f(x) = p_{n_0}(x)$$

IV.7) Soit $\tilde{q}$ un polynôme unitaire à coefficients entiers tel que $\|\tilde{q}\|_I < 1$. q est nécessairement non constant. Il possède donc un ensemble fini de zéros, noté Z, avec $J(I) \subset Z$.

Si $Z \neq J(I)$ soit $\{x_1, \ldots, x_p\} = Z - J(I)$.

Pour chacun des x_i il existe q_i unitaire avec $\|q_i\|_I < 1$ et $q_i(x_i) \neq 0$

Soit $r = \max(\deg q_i)$, alors $\deg \tilde{q}^{r+1} > \deg q_i$ pour tout i.

Donc pour tout entier n :

$$\tilde{q}_n = \tilde{q}^{2n(r+1)} + \sum_{i=1}^{p} q_i^{2n}$$ est unitaire de degré n et

$$\lim_{n \to +\infty} \|\tilde{q}_n\|_I = 1.$$

Il existe donc n_0 tel que $\|\tilde{q}_{n_0}\|_I < 1$, et $\tilde{q}_{n_0} \in \mathbb{Z}[X]$

$$J(I) \subset Z(\tilde{q}_{n_0}) \subset J(I).$$

Il existe donc $q = \tilde{q}_{n_0}$ dans $\mathbb{Z}[X]$, avec $\|q\|_I < 1$ tel que

$$q(x) = 0 \Rightarrow x \in J(I)$$ (on a même équivalence)

IV.8) Soit p dans $\mathbb{R}[X]$. D'après la question IV.2) on peut écrire $p(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i(x)\, q(x)^i$ où q est dans $\mathbb{Z}[X]$ et vérifie $\|q\|_I < 1$.

De plus $\forall i \; b_i \in \mathbb{R}_{d-1}[X]$, où $d = \deg q$.

On peut écrire. $b_i = \tilde{b}_i + \check{b}_i$, où $\tilde{b}_i$ est dans $\mathbb{Z}_{d-1}[X]$

et $\check{b}_i$ est dans $\mathbb{R}_{d-1}[X]$, à coefficients dans $[0,1]$.

On a vu en IV.3 qu'il existe M_1 tel que $\forall i \; \|\check{b}_i\|_I \leq M_1$.

On peut donc écrire

$$p(x) = \underbrace{\sum_{i=0}^{m} \tilde{b}_i(x)\, q(x)^i}_{= \tilde{p}(x) \in \mathbb{Z}[X]} + \underbrace{\sum_{i=0}^{m} \check{b}_i(x)\, q(x)^i}_{r(x)}$$

$$\|r\|_I \leq \sum_{i=0}^{m} \|\check{b}_i\|_I \|q\|_I^i \leq \frac{M_1}{1 - \|q\|_I} = M$$

q.e.d.

IV. 9) Soit x dans $J(I)$, k un entier non nul, alors $\frac{f}{q^k}$ est nulle dans un voisinage de x, il existe donc une fonction continue g telle que $\forall x \notin J(I)$ $g(x) = \frac{f(x)}{(q(x))^k}$ et ($g(x) = 0$ si $x \in J(I)$).

On applique le théorème de Weierstrass à g. Il existe donc p_1 dans $\mathbb{R}[X]$ tel que ~~$\| \frac{f}{q^k} - p_1 \|_I \leq 1$~~ $\| g - p_1 \| \leq 1$

D'après la question précédente il existe $\tilde{p}_1$ dans $\mathbb{Z}[X]$ tel que $\| g - \tilde{p}_1 \|_I \leq 1 + M$.

Finalement $\| f - \tilde{p}_1 q^k \|_I \leq (M+1) \| q \|_I^k$

Or $\lim \| q \|_I^k = 0$, donc quitte à prendre k assez grand

$\forall \varepsilon \quad \exists p \in \mathbb{Z}[X] \ (p = \tilde{p}_1 q^k) \quad \| f - p \|_I < \varepsilon$.

IV. 10) Soit $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\tilde{f}$ continue sur I et telle que ($\forall x \ q(x) = 0 \ \exists \delta \ |x - y| < \delta \Rightarrow \tilde{f}(y) = 0$) et $\| f - \tilde{f} \| < \varepsilon$

(En effet il existe δ_1 tel que $\forall x \ q(x) = 0 \quad \forall y \ |x - y| < \delta_1 \quad |f(y)| = |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

on pose $\tilde{f}(y) = 0$ si $|x - y| \leq \delta = \frac{\delta_1}{2}$ et $\tilde{f}$ affine sur $[x + \delta, x + \delta_1]$ et $[x - \delta_1, x - \delta]$).

D'après la question précédente il existe $\tilde{p}$ à coefficients entiers telle que $\| \tilde{f} - \tilde{p} \|_I < \varepsilon$. On a $\| f - \tilde{p} \| < 2\varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tilde{p} \in \mathbb{Z}[X] \quad \| f - \tilde{p} \| < 2\varepsilon$

En choisissant $\varepsilon = \frac{1}{2^{n+1}}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \tilde{p}_n \in \mathbb{Z}[X] \quad \| f - \tilde{p}_n \|_I < \frac{1}{2^n}$.

f est bien limite uniforme d'une suite de polynômes de $\mathbb{Z}[X]$

IV.11) La condition est nécessaire d'après la question IV.6)

Réciproquement, s'il existe p à coefficients entiers tel que $\forall x \in J(I)$ $f(x) = p(x)$, alors $g = f - p$ vérifie les hypothèses de la question précédente, donc g est limite uniforme de la suite de polynômes $(p_n)_{n \geq 0}$. f est alors limite uniforme sur I de la suite de polynômes à coefficients entiers $(p + p_n)_{n \geq 0}$

IV.12) On a vu en IV.5 que $J([-1,1]) = \{-1, 0, 1\}$.

Donc f dans $\mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ est limite uniforme de polynômes à coefficients entiers ssi il existe $p \in \mathbb{Z}[X]$ tel que

$$p(-1) = f(-1) \qquad p(0) = f(0) \qquad p(1) = f(1).$$

Ceci implique $(f(-1), f(0), f(1)) \in \mathbb{Z}^3$ et $f(1) - f(-1) \in 2\mathbb{Z}$.

(car si $p = \sum_{i \geq 0} a_i X^i$ $p(1) - p(-1) = 2\left(\sum_{i \geq 0} a_{2i+1}\right)$)

Réciproquement : Supposons $(f(-1), f(0), f(1)) \in \mathbb{Z}^3$ et $f(1) - f(-1) \in 2\mathbb{Z}$

(c'est-à-dire $f(1)$ et $f(-1)$ de même parité).

Alors le polynôme d'interpolation de Lagrange

$$p = f(1)\frac{X(X+1)}{2} + f(0)\frac{X^2-1}{-1} + f(-1)\frac{X(X-1)}{2}$$

$$p = \left(\frac{f(1)+f(-1)}{2} - f(0)\right)X^2 + \frac{f(1)-f(-1)}{2}X + f(0)$$

est à coefficients dans $\mathbb{Z}[X]$ et vérifie

$$p(0) = f(0) \quad p(1) = f(1) \quad p(-1) = f(-1)$$

5. Polynômes symétriques.

V.1) Soit $\underline{i} \in \mathbb{N}^n$ et $\underline{j} \in \mathbb{N}^n$ $\underline{i} \neq \underline{j}$.

Si $\sum_k i_k \neq \sum_k j_k$ alors soit $\sum i_k > \sum j_k$ et $\underline{i} > \underline{j}$

soit $\sum i_k < \sum j_k$ et $\underline{j} > \underline{i}$

Si $\sum_k i_k = \sum j_k$ puisque ~~que~~ $\underline{i} \neq \underline{j}$ $k_0 = \min \{k, i_k \neq j_k\}$ existe.

Si $i_{k_0} > j_{k_0}$ alors $\underline{i} > \underline{j}$

$i_{k_0} < j_{k_0}$ alors $\underline{j} > \underline{i}$.

Toutes les possibilités ayant été étudiées on en déduit

$$\forall (\underline{i}, \underline{j}) \in \mathbb{N}^n \quad \underline{i} = \underline{j} \text{ ou } \underline{i} < \underline{j} \text{ ou } \underline{i} > \underline{j}.$$

V.2) Si $\underline{j} < \underline{i}$ alors $\sum_{k} j_k \leq \sum_k i_k = N$

Donc $\forall k \quad j_k \leq N$ et $\text{card}\{\underline{j}, \underline{j} < \underline{i}\} \leq (N+1)^n$.

Rq: On peut faire beaucoup mieux comme majoration.

V.3) Soit $p \in \mathbb{Z}[T_1, \quad , T_n]$

Supposons $i_k > i_j$ avec $k > j$ et soit τ

la transposition (k, j).

Alors $\deg(p^\tau) \geq (i_1, \quad, i_{j-1}, i_k, i_{j+1}, \quad, i_{k-1}, i_j, i_{k+1} \quad, i_n)$

$> (i_1, \quad, i_{j-1}, i_j, i_{j+1} \quad, i_n)$

$$\deg(p^\tau) > \deg(p)$$

Or $p^\tau = p$, il y a contradiction.

Donc $i_1 \geq i_2 \quad \geq i_n$.

V.4) On démontre comme dans le cas des polynômes à une indéterminée que si P et Q sont deux polynômes non nuls alors $\deg PQ = \deg P + \deg Q$. (avec $\underline{i} + \underline{j} = (i_1+j_1, i_2+j_2, \dots, i_n+j_n)$)
c'est clair pour les monômes, dans le cas général il suffit de développer le produit par bilinéarité et de remarquer que

$(\underline{i}' \leq \underline{i}$ et $\underline{j}' \leq \underline{j}) \Rightarrow \underline{i}'+\underline{j}' \leq \underline{i}+\underline{j}$, l'inégalité étant stricte si l'une des deux premières l'est.

On en déduit

$$\deg S_1^{d_1} \dots S_n^{d_n} = d_1 \deg S_1 + d_2 \deg S_2 \dots + d_n \deg S_n$$

$$= (i_1 - i_2)(1,0,\dots,0) + (i_2 - i_3)(1,1,0,\dots,0) + \dots d_n (1,\dots,1)$$

$$= (i_1, i_2, \dots, i_n)$$

$$\deg S_1^{d_1} \dots S_n^{d_n} = \underline{i}$$

Or

$$P = \mathrm{dom}(P) X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n} + \sum_{\underline{j} < \underline{i}} a_{\underline{j}} X_1^{j_1} \dots X_n^{j_n}$$

$$S_1^{d_1} \dots S_n^{d_n} = X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n} + \sum_{\underline{j} < \underline{i}} b_{\underline{j}} X_1^{j_1} \dots X_n^{j_n}$$

Par conséquent

$$P - \mathrm{dom}(P) S_1^{d_1} \dots S_n^{d_n} = \sum_{\underline{j} < \underline{i}} (a_{\underline{j}} - b_{\underline{j}}) X_1^{j_1} \dots X_n^{j_n}$$

et

$$P = \mathrm{dom}(P) S_1^{d_1} \dots S_n^{d_n} \quad \text{ou}$$

$$Q = P - \mathrm{dom}(P) S_1^{d_1} \dots S_n^{d_n} \neq 0 \quad \text{et} \quad \deg(Q) < \deg(P)$$

V.5) le résultat s'établit par récurrence, puisque si P est symétrique Q l'est aussi et que d'après V.2) il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante d'indices $\underline{i}$. (Si le résultat est faux, introduire le polynôme de degré minimal et aboutir à une contradiction)

6. Entiers algébriques

VI. 1) Soit $\boxed{x = \frac{p}{q}}$, $q \in \mathbb{N}^*$ $p \in \mathbb{Z}$ $p \wedge q = 1$

On suppose x racine de $\boxed{P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i}$ où $\forall i\ a_i \in \mathbb{Z}$ et $a_n = 1$.

alors $q^n \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\frac{p}{q}\right)^i = 0$

$$\boxed{q\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i q^{n-1-i}\right) = -p^n}$$

Donc $q \mid p^n$ or $q \wedge p = 1$ donc $q \wedge p^n = 1$

et par conséquent $q \mid 1$, puis $q = 1$.

En conclusion $\underline{x \in \mathbb{Z}}$. q.e.d.

VI. 2) On peut écrire $\underline{a = c(a)\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{Z}[X]$ avec $c(\alpha) = 1$

De même on écrit $\underline{b = c(b)\beta}$ avec $c(\beta) = 1$.

Donc $ab = c(a)c(b)\alpha\beta$.

$\underline{c(ab) = c(a)c(b)}$ équivaut à $\underline{c(\alpha\beta) = 1}$.

Soit p un nombre premier, soit $\underline{i_\alpha} = \underline{\max_i \{i,\ p \nmid \alpha_i\}}$

(un tel i_α existe car $\{i,\ p \nmid \alpha_i\} \neq \emptyset$ puisque $c(\alpha) = 1$)

Définissons de même $\underline{i_\beta} = \underline{\max_i \{i,\ p \nmid \beta_i\}}$.

Examinons le coefficient $\gamma_{i_\alpha + i_\beta}$ de $X^{i_\alpha + i_\beta}$ dans $\alpha\beta$

$$\gamma_{i_\alpha + i_\beta} = \sum_{p+q = i_\alpha + i_\beta} \alpha_p \beta_q = \underbrace{\sum_{p > i_\alpha} \alpha_p \beta_q}_{\text{divisible par } p} + \underbrace{\alpha_{i_\alpha} \beta_{i_\beta}}_{\text{premier avec } p.} + \underbrace{\sum_{q > i_\beta} \alpha_p \beta_q}_{\text{divisible par } p.}$$

Donc $\underline{p \nmid \gamma_{i_\alpha + i_\beta}}$.

$\forall p \in \mathcal{P}\ \exists i\ p \nmid \gamma_i$ donc $c(\alpha\beta) = 1$.

q.e.d.

VI.3) . Il existe au moins un polynôme p_x dans $\mathbb{Z}[X]$, unitaire et de degré minimal et tel que $p_x(x)=0$.

- Supposons que ce polynôme ne soit pas ~~s~~irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, alors on peut écrire

$$p_x = PQ, \quad P\in\mathbb{Q}[X],\ Q\in\mathbb{Q}[X]\ 1\leq \deg P<\deg p_x$$

Ecrivons $P=\frac{a}{b}P_1$ où $P_1\in\mathbb{Z}[X]$ et $c(P_1)=1$ $a\wedge b=1$

$Q=\frac{c}{d}Q_1$ où $Q_1\in\mathbb{Z}[X]$ et $c(Q_1)=1$ $c\wedge d=1$

alors $p_x=\frac{ac}{bd}P_1Q_1=\frac{a'}{b'}P_1Q_1$ avec $a'\wedge b'=1$ $b'\in\mathbb{N}^*$.

$$b'p_x = a'P_1Q_1$$
$$c(b'p_x)=c(a'P_1Q_1)$$
$$b'c(p_x)=a'c(P_1)c(Q_1)$$
$b' \quad = a'$ et donc $a'=b'$ puis

$p_x = P_1Q_1$ où $P_1\in\mathbb{Z}[X]$ $Q_1\in\mathbb{Z}[X]$ $1\leq \deg P_1<\deg p_x$.

(On a montré ici qu'un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$, irréductible sur $\mathbb{Z}[X]$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$, par la contraposée)

Or a $p_x(x)=0=P_1(x)Q_1(x)$, donc $P_1(x)=0$ ou $Q_1(x)=0$ ce qui contredit la minimalité du degré.

Par contraposée p_x est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

De plus en effectuant la division euclidienne par p_x on prouve.

$\forall q\in\mathbb{Q}[X]\quad q(x)=0 \iff p_x\mid q$ (dans $\mathbb{Q}[X]$).

Un tel polynôme est donc unique.

Si $\tilde{p}_x$ vérifie la même propriété alors

$$p_x\mid\tilde{p}_x \text{ et } \tilde{p}_x\mid p_x$$

Or p_x et $\tilde{p}_x$ sont unitaires donc $p_x=\tilde{p}_x$.

Si p_x possède une racine au moins double dans $\mathbb{C}$ alors $\underline{pgcd_{\mathbb{C}[X]}(p_x, p'_x) \neq 1}$.

Or le pgcd peut être calculer ~~dans~~ ~~$\mathbb{Q}$~~ sans sortir de $\mathbb{Q}[X]$ en utilisant la division euclidienne et l'algorithme d'Euclide.

Donc $\underline{pgcd_{\mathbb{Q}[X]}(p_x, p'_x) \neq 1}$, ce qui contredit l'irréductibilité de p_x.

Conclusion ! toutes les racines de p_x (dans $\mathbb{C}$) sont simples.

VI.4) $p_x(x_i) = 0$ et p_x est unitaire, dans $\mathbb{Z}[X]$ et irréductible, donc $p_x = p_{x_i}$ et par conséquent

$$r \in \mathbb{Q}[X] \text{ et } r(x_i) = 0 \iff p_{x_i} \mid r \iff p_x \mid r.$$

VI.5) $p_x(X - y_1) \cdots p_x(X - y_m) = \sum_{i=0}^{m\deg(p_x)} c_i X^i = Q(X)$

où $c_i (= c_i(y_1, \ldots, y_m))$ est une fonction polynomiale des y_i, à coefficients dans $\mathbb{Z}$ (fonction des coefficients de p_x).

D'après le résultat de la question V.5)

$$c_i = P_i(S_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, S_m(y_1, \ldots, y_m)) \text{ où } P_i$$

est dans $\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_m]$.

Or $S_k(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{Z}$ puisque y est un entier algébrique. Donc $Q \in \mathbb{Z}[X]$.

Or $Q(x+y) = p_x(x)\, p_x(x+y-y_2) \cdots = 0$ donc $x+y$ est un entier algébrique

VI.6) On emploie la même technique

Si $y=0$ alors $xy=0$ est un entier algébrique.

Si $y\neq 0$ alors $\forall i\ y_i\neq 0$ (Sinon $P_y = P_{y_i} = X$ et $y=0$)

On considère alors :

(*)

$$Q = (y_1 \cdots y_m)^{\deg(P_x)} P_x\left(\frac{X}{y_1}\right) \cdots P_x\left(\frac{X}{y_m}\right) \in \mathbb{Z}[X] \text{ unitaire de degré } m\deg(P_x)$$

et $Q(xy)=0$

Donc xy est ~~algébrique~~ un entier algébrique.

(*) le coefficient de X^i dans Q est

$$q_i = (y_1 \cdots y_m)^{\deg(P_x)} \sum_{i_1+\cdots+i_m=i} a_{i_1} \cdots a_{i_m} \frac{1}{y_1^{i_1}} \cdots \frac{1}{y_m^{i_m}}$$

soit

$$\sum_{i_1+\cdots+i_m=i} a_{i_1} \cdots a_{i_m}\, y_1^{d-i_1} \cdots y_m^{d-i_m}$$

qui est bien un polynôme symétrique en les y_i, à coefficients entiers.

De plus $q_{md} = (y_1 \cdots y_m)^d \dfrac{1}{y_1^d} \cdots \dfrac{1}{y_m^d} = 1$

car $i_1+\cdots+i_m = md$ et $\forall k\ i_k \leq d$

implique $i_1 = \cdots = i_m = d$ (et $a_{i_1} = \cdots a_{i_m} = 1$).

VI.7 $\prod_{i=1}^{r} q(x_i) \in \mathbb{Z}$ (car $Q = \prod_{i=1}^{r} q(T_i)$ est symétrique à coefficients entiers donc $Q = Q_1(S_1, \ldots, S_r)$).

De plus $\left|\prod_{i=1}^{r} q(x_i)\right| = \prod_{i=1}^{r} |q(x_i)| \leq \|q\|_I^r < 1$

Donc $\prod_{i=1}^{r} q(x_i) = 0$ Donc $\exists i\ q(x_i)=0$, donc $P_x \mid q$ donc $q(x)=0$

Puis $F(I) \subset J(I)$ question VI.4.

VI 8) $P = X(X^2-1)(X^2-2)$

P est unitaire et dans $\mathbb{Z}[X]$ et impair.

$\forall x \in [0,1] \quad |P(x)| \leq 2\ x(1-x^2) = 2(x-x^3) \leq 2\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{2}{3}\right)$

$\forall x \in [0,1] \quad |P(x)| \leq \frac{4}{3\sqrt{3}}$

$\forall x \in [1,2] \quad |P(x)| \leq 2 \times \sup_{t\in[1,2]} (\cancel{t}-1)(2-t) = 2\times\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

et $P(2)=0$ et P est croissante sur $[2, \frac{3}{2}]$

$\forall x \in [2, \frac{3}{2}] \quad |P(x)| \leq \frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{1}{4} < 1$.

Donc $\boxed{\|P\|_{[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]} \leq \max\left(\frac{4}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \frac{15}{32}\right) < 1}$

On a donc $F(I) \subset J(I) \subset Z(P) = \{0, \pm 1, \pm\sqrt{2}\}$.

Or il est clair que $0, \pm 1$ et $\pm\sqrt{2}$ sont des entiers algébriques (racines de X, $X-1$, X^2-2, $X+1$) dont les conjugués sont dans $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$.

Donc $\{-\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}\} \subset F(I) \subset J(I) \subset \{-\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}\}$.

et Finalement, pour $I = [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$

$$\boxed{F(I) = J(I) = \{-\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}\}}$$

7. le noyau de Fekete

VII. 1) le pavé $P = \{\lambda_1 v_1 + \quad + \lambda_n v_n \mid (\lambda_1, \ , \lambda_n) \in [-1,1]^n\}$ est l'image du compact $[-1,1]^n$ par $(\lambda_1, \ , \lambda_n) \mapsto \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ qui est continue. Il est donc compact et en particulier borné pour $\|x\|_\infty = \sup |x_i|$.

Soit $M = \sup\limits_{x \in P} \|x\|_\infty$

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \qquad \bigcup_{k \in [-N,N]^n} (k + P) \subset [-N-M, N+M]^n$$

Supposons que tous les $k+P$ soient distincts, en prenant le volume

$$(2N+1)^n \mathrm{Vol}(P) \leq (2N+2M)^n$$

$$\mathrm{Vol}(P) \leq \frac{(2N+2M)^n}{(2N+1)^n}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$

$$\mathrm{Vol}(P) \leq 1.$$

Par contraposée $\exists (k, k') \in \mathbb{Z}^2 \quad (k+P) \cap (k'+P) \neq \emptyset \quad k \neq k'$ dès que $\mathrm{vol}(P) > 1$.

Soit $x_0 \in (k+P) \cap (k'+P)$ et $w = x_0 - k$ et $w' = x_0 - k'$

alors $w \in P \quad w' \in P$ et $w - w' = k - k' \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$

VII. 2) D'après les résultats de la partie VI, tous les x_i sont distincts, et puisque $m \geq 2$ x n'est pas dans $\mathbb{Q}$ donc tous les x_i sont distincts de 1.

M est donc une matrice de Vandermonde associée au n-uplet $(x_1, \ , x_{n-1}, 1)$ de réels distincts

M est donc inversible et f est bijective.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Considérons le pavé

$$P_r = \left\{ \lambda_1 \frac{1}{4} e_1 + \lambda_2 \frac{1}{4} e_2 + \dots + \frac{1}{4} \lambda_{n-1} e_{n-1} + \lambda_n \frac{r}{2} e_n \;\middle|\; (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [-1,1]^n \right\}$$

Puisque f^{-1} est linéaire $f^{-1}(P_r)$ est un pavé P'_r

$$P'_r = \left\{ \lambda_1 \frac{1}{4} f^{-1}(e_1) + \dots + \lambda_{n-1} \frac{1}{4} f^{-1}(e_{n-1}) + \lambda_n \frac{r}{2} f^{-1}(e_n) \;\middle|\; \lambda \in [-1,1]^n \right\}$$

Son volume est

$$\mathrm{vol}(P') = 2^n \times \frac{1}{4^{n-1}} \times \frac{r}{2} \times \Big| \underbrace{\det(f^{-1}(e_1), \dots, f^{-1}(e_n))}_{\neq 0} \Big|$$

Il existe donc r tel que $\mathrm{Vol}(P'_r) > 1$.

Il existe alors $w \in P'_r$ $w' \in P'_r$ tel que $h = w - w' \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$.

et $f(h) = f(w) - f(w') \in P_r - P_r \subset B(r)$

VII.3) $f(h) = Mh = {}^t(s(x_1), \dots, s(x_{n-1}), \sum_{i=1}^{n} h_i)$.

Puisque $f(h) \in B(r)$ on a clairement $\forall i \ |s(x_i)| \leq \frac{1}{2}$

De plus $s \neq 0$ car $h \neq 0$ et $\deg s \leq n-1 < m = \deg P_x$.

donc $s(x_i) \neq 0$ pour tout i (Question VI.4).

VII.4) Soit k dans $\mathbb{N}^*$, soit L le polynôme d'interpolation de Lagrange tel que

$$\forall i \quad L(x_i) = \frac{y_i}{(s(x_i))^k}$$

D'après la question 4.8) il existe M (indépendant de k) et $\tilde{L}$ tel que $\tilde{L} \in \mathbb{Z}[X]$ et $\|\tilde{L} - L\|_I \leq M$.

On aura $\forall i$ $\left|\tilde{L}(x_i) - \dfrac{y_i}{(D(x_i))^k}\right| \leq M$

$\forall i$ $\left|(D^k.\tilde{L})(x_i) - y_i\right| \leq M \sup_i |D(x_i)|^k \leq \dfrac{M}{2^k}$

Il existe k_0 telque $\dfrac{M}{2^{k_0}} < \varepsilon$ (si $\varepsilon > 0$ est donné)

Si $p = D^{k_0}\tilde{L}$ alors $p \in \mathbb{Z}[X]$ et $\forall i$ $|p(x_i) - y_i| < \varepsilon$

VII. 5) - Ecrivons $S = \{x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1-1}, x_{2,1}, \ldots, x_{2,n_2-1}, \ldots, x_{k,1}, \ldots, x_{k,n_k-1}\}$

où $x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,m_i}$ sont les conjugués de $x_{i,1}$ et $n_i \in \{2, \ldots, m_i\}$.

- Soit $q = \prod_{1 \leq i \leq k} P_{x_{i,1}}$ et $q_i = \dfrac{q}{P_{x_{i,1}}}$ $q \in \mathbb{Z}[X]$. $q_i \in \mathbb{Z}[X]$

Alors $\forall i \neq j$ $q_i(x_{j,l}) = 0$ $1 \leq l \leq n_j - 1$

$q_i(x_{i,l}) \neq 0$ $1 \leq l \leq n_i - 1$

- D'après la question précédente, pour tout $\varepsilon' > 0$, en choisissant $\varepsilon = \min_{1 \leq l \leq n_i - 1}\left(\dfrac{\varepsilon'}{|q_i(x_{i,l})|}\right)$, il existe un polynôme

p_i tel que $\forall l \in \{1, \ldots, n_i - 1\}$ $\left|p_i(x_{i,l}) - \dfrac{y_{i,l}}{q_i(x_{i,l})}\right| < \dfrac{\varepsilon'}{|q_i(x_{i,l})|}$
$\in \mathbb{Z}[X]$

soit $\forall l \in \{1, \ldots, n_i - 1\}$ $|(q_i p_i)(x_{i,l}) - y_{i,l}| < \varepsilon'$

(PS. On a aussi renuméroté les y_i en $y_{1,1}, \ldots, y_{k,n_k-1}$.)

le polynôme $p = \sum_{i=1}^{k} p_i q_i$ est dans $\mathbb{Z}[X]$ et

$\forall i$ $\forall l \in \{1, \ldots, n_i - 1\}$ $p(x_{i,l}) = p_i q_i(x_{i,l})$.

$\forall i$ $|p(x_i) - y_i| < \varepsilon'$

VII 6) Soit $r = \text{ppcm}\{p_x,\ x \in F(I)\}$.

$r \in \mathbb{Z}[X]$, est unitaire et divise q.

De plus $\forall x \in S \quad r(x) \neq 0$

Soit $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon' = \min_{x \in S} \frac{\varepsilon}{|r(x)|} \times \frac{1}{2}$

D'après la question précédente.

$\exists p_1 \in \mathbb{Z}[X] \quad \forall x \in S \quad \left|\frac{f(x)}{r(x)} - p_1(x)\right| < \varepsilon' \leq \frac{\varepsilon}{r(x)} \frac{1}{2}$

Soit $p = p_1 r \in \mathbb{Z}[X]$

$\forall x \in S \quad |f(x) - p(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

et $\forall x \in F(I) \quad p(x) = 0$

$\forall x \in Z(q) \quad |f(x) - p(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

une construction similaire à celle utilisée en IV 10 nous permet d'obtenir g continue telle que $\|g - f\|_I < \frac{\varepsilon}{2}$

et $\forall x \in Z(q) \quad g(x) = p(x)$.

D'après IV. 11 il existe $s \in \mathbb{Z}[X]$ tel que

$\|s - g\|_I < \frac{\varepsilon}{2}$

On en déduit $\|s - f\|_I < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists s \in \mathbb{Z}[X] \quad \|s - f\|_I < \varepsilon$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists s_n \in \mathbb{Z}[X] \quad \|s_n - f\|_I < \frac{1}{2^n}$

f est bien la limite uniforme d'une suite de polynômes de $\mathbb{Z}[X]$

VII. 7. Supposons $F(I) \neq J(I)$, alors il existe x dans S.

Une fonction f de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ est limite uniforme d'une suite de éléments de $\mathbb{Z}[X]$ si et seulement si il existe une polynôme p de $\mathbb{Z}[X]$ tel que $\forall y \in J(I)$ $p(y)=f(y)$.

Ceci implique en particulier $\exists p \in \mathbb{Z}[X]$ $f(x)=p(x)$.

D'après la question précédente, cela implique que pour toute fonction continue qui s'annule sur $F(I)$ il existe p dans $\mathbb{Z}[X]$ tel que $f(x)=p(x)$.

Or $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ il existe f continue nulle sur $F(I)$ et prenant la valeur λ en x (par exemple le polynôme d'interpolation de Lagrange).

Or $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable et $\{p(x), p \in \mathbb{Z}[X]\}$ est dénombrable. On obtient donc une contradiction.

et $F(I) = J(I)$.