

## Première composition de Mathématiques

Première partie.

1.a) Si  $\exists M > 0$   $|u_k| \leq M^k$  alors  $(u_k (\frac{1}{M})^k)_{k \geq 1}$  est bornée, donc d'après le lemme d'Abel  $\boxed{r(u) \geq \frac{1}{M} > 0}$ .

Réciproquement, si  $r(u) > 0$ , soit  $r < r(u)$ . Soit  $(u_k r^k)_{k \geq 1}$  bornée. Il existe  $M_1 \in \mathbb{R}^{+*} \forall k |u_k r^k| \leq M_1$ .  
Donc  $\forall k \in \mathbb{N}^* |u_k| \leq \frac{M_1}{r^k} \leq \left( \frac{\max(1, M_1)}{r} \right)^k = M^k, M > 0$ .

1.b) Supposons  $\forall k |u_k| \geq M^k$  pour un  $M > 0$ .

Soit  $r > \frac{1}{M}$  alors  $|u_k r^k| \geq (Mr)^k$  avec  $\lim_{k \rightarrow +\infty} (Mr)^k = +\infty$ .

Donc  $\boxed{r > \frac{1}{M} \Rightarrow (u_k r^k)_{k \geq 1} \text{ non bornée. ; soit } r(u) \leq \frac{1}{M}}$ .

$$\underline{2)} \quad \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i^2 (k-i)^2} \leq 2 \times \sum_{i=1}^{\lceil \frac{k}{2} \rceil} \frac{1}{i^2 (k-i)^2}$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i^2 (k-i)^2} \leq 2 \times \sum_{i=1}^{\lceil \frac{k}{2} \rceil} \frac{1}{i^2} \times \frac{1}{(k - \lceil \frac{k}{2} \rceil)^2}$$

$$\text{or } \sum_{i=1}^{\lceil \frac{k}{2} \rceil} \frac{1}{i^2} \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2} \left( = \frac{\pi^2}{6} \right)$$

$$\text{et } \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k^2}{(k - \lceil \frac{k}{2} \rceil)^2} = 4 \text{ donc } \exists M \frac{k^2}{(k - \lceil \frac{k}{2} \rceil)^2} \leq M$$

$$\text{et } \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i^2 (k-i)^2} \leq 2 \times \frac{\pi^2}{6} \times M \times \frac{1}{k^2} = \gamma \frac{1}{k^2}.$$

## Deuxième partie.

(2)

3)  $(A_a u)_k = 0 \Leftrightarrow \forall k \quad (k+a) u_k = 0$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \quad u_k = 0 & \text{si } a \notin -\mathbb{N}^* (= \mathbb{Z}^{*-}) \\ \forall k \neq -a \quad u_k = 0 & \text{si } a \in \mathbb{Z}^{*-} \end{cases}$

$\text{Ker } A_a = \{0\} \text{ si } a \notin \mathbb{Z}^{*-}$

$\text{Ker } A_a = \mathbb{C} e_{-a} \text{ si } a \in \mathbb{Z}^{*-} \text{ avec } e_i = (\delta_{i,k})_{k \in \mathbb{N}^*}$

De même.

$\begin{cases} \text{Si } a \notin \mathbb{Z}^{*-} & \text{Im } A_a = E & ((A_a^{-1} u)_k = (\frac{1}{k+a} u_k)) \\ \text{Si } a \in \mathbb{Z}^{*-} & \text{Im } A_a = \{u \in E, u_{-a} = 0\} \end{cases}$

(antécédant  $(\frac{1}{k+a} u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ )

$(u_k = \frac{1}{k+a} u_k \text{ si } k \neq -a, u_{-a} = 0)$

4) Soit  $u \in E_R$   $r(u) \leq R$ . Soit  $r < R$  alors il existe  $r'$  tel que  $r < r' < R$ .

$(u_k r'^k)_{k \geq 1}$  est bornée.

Or  $u_k (k+a) r^k = u_k r'^k \times \underbrace{(k+a) \left(\frac{r}{r'}\right)^k}_{\text{tend vers } 0}$

donc  $(u_k (k+a) r^k)_{k \geq 0}$  est bornée et  $r(A_a u) \geq r$ .

Finalement  $r < R \Rightarrow r(A_a u) \geq r$

donc  $r(A_a u) \geq R$ .

et

$A_a u \in E_R$

$A_a(E_R) \subset E_R$ .

+ Soit  $a \in \mathbb{Z}^{*-}$ .  $A_a$  est une bijection de  $E$  sur lui-même.

et  $A_a^{-1} u = (\frac{1}{k+a} u_k)_{k \geq 1}$  donc si  $r < r(u) \left( \frac{1}{k+a} u_k r^k \right)_{k \geq 1}$

est bornée et  $r(A_a^{-1} u) \leq r(u)$  en particulier  $A_a^{-1}(E_R) \subset E_R$ .

En conclusion  $A_a$  est un isomorphisme de  $E_R$  sur lui-même