Les polynômes de Bernoulli

Partie I

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On note E_n l'espace vectoriel des polynômes à coefficients rationnels de degré inférieur ou égal à n.
1°) Étudier la restriction à chacun des espaces E_n de l'application Δ de l'espace vectoriel des polynômes à coefficients rationnels dans lui-même qui associe au polynôme P le polynôme $\Delta(P)$ tel que, pour tout x,

$$\Delta(P)(x) = P(x) - P(x-1).$$

*Indication:*On vérifiera que Δ est une application linéaire et on précisera le noyau et l'image de la restriction de Δ à chaque sous-espace E_n.
2°) a) Montrer qu'il existe un polynôme Q_n appartenant à E_{n+1}, et un seul tel que, pour tout entier naturel p strictement supérieur à 0, $Q_n(p)$ soit égal à la somme des puissances n-èmes des entiers naturels strictement inférieurs à p.
b) Montrer que le polynôme Q_n vérifie les égalités : $Q_n(0) = Q_n(1) = 0$.
3°) Montrer qu'il existe une suite (a_n) de nombres rationnels, définie pour n supérieur ou égal à 2, telle que l'on ait :

$$Q'_n + a_n = nQ_{n-1} \text{ pour } n \geqslant 2,$$

où Q'_n désigne le polynôme dérivé du polynôme Q_n. *Indication:*On calculera $\Delta(Q'_n - nQ_{n-1})$.
4°) On désigne par $\overline{Q}_n$ le polynôme vérifiant identiquement : $\overline{Q}_n(x) = Q_n(1-x)$. Comparer les polynômes $\overline{Q}_n$ et Q_n.
5°) Calculer Q_1 et Q_2.
6°) Calculer $Q_{2p}(\frac{1}{2})$ et a_{2p+1}.
7°) Établir que les polynômes Q_{2p} ne s'annulent sur l'intervalle ouvert $]0,1[$ qu'au point $\frac{1}{2}$ et que les polynômes Q_{2p+1} sont de signe constant sur ce même intervalle. *Indication:*c'est une question de convexité.
8°) On désigne par $\sigma(p)$ l'entier égal à $+1$ ou -1 représentant le signe constant de la fonction Q_{2p-1} sur l'intervalle ouvert $]0,1[$. Montrer que a_{2p} n'est pas nul et qu'il est du signe de $\sigma(p)$.
9°) Montrer que $\sigma(p)$ est égal à $(-1)^p$. *Indication:*on peut étudier la fonction Q_{2p+1} au voisinage de 0.
10°) Montrer que la suite de polynômes (Q_n) est entièrement déterminée par le polynôme $Q_1 = X(X-1)/2$ et les relations de récurrence : $Q''_{n+1} = (n+1)Q'_n$ et $Q_{n+1}(0) = Q_{n+1}(1) = 0$.
11°) On appelle B_p le rationnel positif $(-1)^p a_{2p}$. Calculer les nombres B_1, B_2 et B_3.

Partie II

Les polynômes Q_n et les nombres B_n sont ceux introduits dans la première partie. Conformément à l'usage, on dit qu'une fonction réelle continue f définie sur un segment $[a,b]$ est p fois continuement dérivable sur ce segment si elle est dérivable jusqu'à l'ordre p sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ et si ses p premières dérivées sur $]a,b[$ sont les restrictions de fonctions continues sur $[a,b]$. On se permettra donc l'abus d'écriture usuel consistant, par exemple, à noter $f'(a)$ ce qui est en fait la dérivée à droite $f'_d(a)$.
1°) Soit n un entier naturel et f une fonction $2n+3$ fois continuement dérivable sur le segment $[0,1]$. Montrer l'égalité :

$$f(1) - f(0) = \frac{f'(0) + f'(1)}{2} + \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p B_p}{(2p)!} \left(f^{(2p)}(1) - f^{(2p)}(0)\right) + R_n$$

où le reste R_n est égal à l'intégrale : $\displaystyle\frac{1}{(2n+1)!} \int_{x=0}^{1} Q_{2n+1}(x) f^{(2n+3)}(x)\ \mathrm{d}x$.
2°) Montrer que la valeur absolue de R_n est majorée par $B_{n+1}\|f^{(2n+3)}\|/(2n+2)!$ où $\|f^{(2n+3)}\|$ désigne la borne supérieure de la valeur absolue des nombres $f^{(2n+3)}(x)$ lorsque x décrit le segment $[0,1]$.

3°) Établir, pour une fonction $2n+2$ fois continuement dérivable sur un segment $[a,b]$ et un entier m supérieur ou égal à 2, la formule de calcul approché de l'intégrale :

$$\int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2m}\Big(f(a)+f(b)+2\sum_{p=1}^{m-1} f\Big(a+p\,\frac{b-a}{m}\Big)\Big)$$
$$+\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^p B_p}{(2p)!}\,\Big(\frac{b-a}{m}\Big)^{2p}(f^{(2p-1)}(b)-f^{(2p-1)}(a))+R'_n\,,$$

où la valeur absolue du reste R'_n est majorée par : $\dfrac{B_{n+1}}{(2n+2)!}m\Big(\dfrac{b-a}{m}\Big)^{2n+3}\|f^{(2n+2)}\|$ et $\|f^{(2n+2)}\|$ désigne la borne supérieure de la valeur absolue des nombres $f^{(2n+2)}(x)$ lorsque x décrit le segment $[a,b]$.
4°) Application numérique. On considère la fonction $y=1/x$ sur le segment $[1,2]$. L'entier n étant choisi égal à 2, comment faut-il choisir le nombre m d'intervalles du partage pour que le reste R'_n soit inférieur à 10^{-8} en valeur absolue ? Donner une expression d'un nombre rationnel qui approche $\ln(2)$ à 10^{-8} près. *Indication:*L'usage d'une calculette est recommandé pour cette question.

Partie III

1°) Soit m un entier naturel et n un entier supérieur ou égal à 1. Établir l'égalité :

$$\int_{t=0}^{1} Q_{2m+1}(t)\cos(2\pi nt)\;\mathrm{d}t = (-1)^m\frac{(2m+1)!}{(2\pi n)^{2m+2}}.$$

2°) Donner une expression intégrale de la somme partielle $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{2m+2}}$. *Indication:*On utilisera, après l'avoir prouvée, la relation : $\cos(\theta)+\cos(2\theta)+\ldots+\cos(N\theta)=\dfrac{\sin((N+\frac{1}{2})\theta)}{2\sin(\frac{1}{2}\theta)}-\dfrac{1}{2}$ où θ désigne un réel non multiple entier de 2π.
3°) Montrer que la fonction définie sur l'intervalle ouvert $]0,1[$ par $g(x)=Q_{2m+1}(x)/\sin(\pi x)$ est la restriction d'une fonction continue sur l'intervalle fermé $[0,1]$.
4°) Montrer le résultat suivant (dû à Lebesgue):

$$\text{si } f \text{ est une fonction réelle continue sur } [a,b] \text{ alors } \lim_{n\to 0}\int_{t=a}^{b} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

5°) Achever le calcul, pour tout entier naturel m, de la somme de la série de terme général $1/n^{2m+2}$, c'est-à-dire déterminer la valeur de $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\Big(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{2m+2}}\Big)$.