Concours Commun Centrale-Supélec PSI 2016 Mathématiques I

I Généralités

I.A - Propriétés élémentaires

I.A.1) $\mathcal{X}_n$ est l'ensemble des application de $[\![1,n]\!]^2$ vers $\{0,1\}$. Il est fini de cardinal 2^{n^2}

I.A.2) $M=(m_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ $\quad |\det M| = \left|\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n} m_{i,\sigma(i)}\right|$

$|\det M| \leq \sum_{\sigma\in S_n} \prod m_{i,\sigma(i)} \leq \sum_{\sigma\in S_n} 1 = n!$

Pour qu'il y ait égalité il faudrait au moins $\forall i,j$ $m_{i,j}=1$, mais dans ce cas $\det M = 0. < n!$ (On pouvait utiliser un autre argument en remarquant que $\varepsilon(\sigma)=-1$ pour $\frac{n!}{2}$ permutations, on aurait obtenu ainsi $-\frac{n!}{2} \leq \det M \leq \frac{n!}{2}$).

I.A.3) Soit M et N dans $\mathcal{Y}_n$ et t dans $[0,1]$.

$\forall i,j$ $\quad t\,m_{i,j}+(1-t)\,n_{i,j}\in[0,1]$ donc $tM+(1-t)N\in\mathcal{Y}_n$ et

$\mathcal{Y}_n$ est convexe.

- Toutes les normes sur $M_n(\mathbb{R})$, qui est de dimension finie, sont équivalentes, Si on choisit $\|M\|_\infty = \sup |m_{i,j}|$, on obtient, pour toute matrice M de $\mathcal{Y}_n$, $\|M\|_\infty \leq 1$. Donc $\mathcal{Y}_n$ est bornée.

Si $M=\lim_{p\to+\infty} M_p$, avec $M_p=(m_{i,j}^{(p)})\in\mathcal{Y}_n$ alors

$m_{i,j}=\lim_{p\to+\infty} m_{i,j}^{(p)}\in[0,1]$ (car $[0,1]$) est fermé, donc

$M\in\mathcal{Y}_n$ et $\mathcal{Y}_n$ est fermé

$M_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie. $\mathcal{Y}_n$ est fermé et borné donc

$\mathcal{Y}_n$ est compact

I.A.4) Soit M dans $\mathcal{Y}_n$, $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(M)$ et $X \neq 0$ dans $\mathbb{C}^n$ tel que $MX = \lambda X$. Soit i_0 tel que $|x_{i_0}| = \max_i |x_i| > 0$.

Or a $\lambda x_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} x_j$, donc $|\lambda|\,|x_{i_0}| \leq \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}|\,|x_j|$,

soit $|\lambda|\,|x_{i_0}| \leq n\,|x_{i_0}|$ (car $|m_{i,j}| \leq 1$ et $|x_i| \leq |x_{i_0}|$).

$|x_{i_0}| > 0$ donc $|\lambda| \leq n$

. Si on prend $M = (1)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ et $X = (1)_{1\leq i\leq n}$ alors $MX = nX$

I.B) Etude de $\mathcal{X}'_n = \mathcal{X}_n \cap GL_n(\mathbb{R})$

I.B.1) $\mathcal{X}'_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

(Il faut que chaque ligne et chaque colonne soit non nulle, ce qui laisse 7 matrices. On ôte $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui n'est pas inversible)

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique X^2-1, scindé à racines simples donc elle est diagonalisable.
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique X^2-X-1, scindé à racines simples donc elle est diagonalisable. Il en est de même de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable !
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont pour polynôme caractéristique $(X-1)^2$. Leur seule valeur propre est 1. Si elle étaient diagonalisables elles seraient semblable à I_2 donc égales à I_2. Elles ne sont pas diagonalisables

I.B.2) - $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Or $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $M_2(\mathbb{R})$, donc $\mathcal{X}'_2$ engendre bien $M_2(\mathbb{R})$

- le résultat s'étend à l'ordre n, en considérant des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & a & & c \\ & & & 1 & & 0 \\ 0 & & d & & b & \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ - i\text{ème ligne} \\ \\ - j\text{ème ligne} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

où $\begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix} \in \mathcal{X}'_2$, on montre que pour tout (i,j) $E_{i,j} \in \mathrm{Vect}\{\mathcal{X}'_n\}$.

II Deux problèmes d'optimisation.

II. A. Etude de la distance à $\mathcal{Y}_n$.

II. A. 1) - La linéarité de la trace, de la transposition et la bilinéarité du produit matricielle montrent que

$\varphi : (M, N) \longmapsto tr({}^t M N)$ (qui est clairement bien définie)

est bilinéaire.

- Elle est symétrique car $\forall (M,N)$ $(N|M) = tr({}^t N M) = tr({}^t({}^t M N)) = tr({}^t M N)$

donc $\forall (M,N)$ $(N|M) = (M|N)$

- $\forall (M,N)$ $\varphi(M|N) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_{k,i}\, n_{k,i}$

en particulier $(M|M) = \sum_{i,k} m_{k,i}^2 \geq 0$

et $(M|M) = 0 \Rightarrow \forall i,k \; m_{k,i} = 0 \Leftrightarrow M = 0$.

II. A. 2). On a vu $\mathcal{Y}_n$ est compact, la norme est continue

donc $N \mapsto \|M - N\|$ est continue sur $\mathcal{Y}_n$. Elle atteint

donc une borne inférieure, ce qui prouve l'existence de M.

II. A 3) - Soit M_1 et M_2 dans $\mathcal{Y}_n$ tels que $\|A - M_1\| = \|A - M_2\|$

et $\forall N \in \mathcal{Y}_n$ $\|A - N\| \geq \|A - M_i\|$

L'identité du parallélogramme nous donne

$$\left\| \frac{1}{2}(A - M_1) + \frac{1}{2}(A - M_2) \right\|^2 + \left\| \frac{1}{2}(A - M_1) - \frac{1}{2}(A - M_2) \right\| = 2\left(\left\| \frac{1}{2}(A - M_1) \right\| + \left\| \frac{1}{2}(A - M_2) \right\|^2 \right)$$

$$\left\| A - \frac{1}{2}(M_1 + M_2) \right\|^2 + \frac{1}{4}\|M_1 - M_2\|^2 = \|A - M_1\|^2$$

Or $\|A - \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\| \geq \|A - M_1\|$ car $\mathcal{Y}_n$ est convexe.

Par conséquent $\|M_1 - M_2\|^2 \leq 0$ et $M_1 = M_2$.

- ~~concl~~ Déterminons les coefficients $(m_{i,j})$ de M

On cherche des $(m_{i,j})$ dans $[0,1]^{n^2}$ tels que

$\sum_{i,k} (a_{i,k} - m_{i,k})^2$ soit minimal.

Il est clair que cela est ~~posé~~ réalisé ssi pour tout i,j $(a_{i,j} - m_{i,j})^2$ est minimal.

On doit donc chercher $\min\limits_{t\in[0,1]} (a_{i,j}-t)^2$.

Trois cas sont possibles.

Si $a_{i,j} \geq 1$ le minimum est atteint en $t=1$.

Si $a_{i,j} \leq 0$ le minimum est atteint en $t=0$

Si $a_{i,j} \in [0,1]$ ———————— $t = a_{i,j}$.

On a donc $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ avec

$m_{i,j} = 1$ si $a_{i,j} \geq 1$

$m_{i,j} = a_{i,j}$ si $0 \leq a_{i,j} \leq 1$

$m_{i,j} = 0$ si $0 \geq a_{i,j}$.

On remarquera que la fin de II.A.3) aurait pu nous dispenser de répondre à II.A.2) et au début de II.A.3). Mais la détermination de M n'étant pas totalement triviale, on peut penser que l'auteur du sujet a voulu permettre à plus de candidats d'établir l'existence et l'unicité de M.

II.B Maximisation du déterminant sur $\mathcal{X}_n$ et $\mathcal{Y}_n$:

II.B.1) $\mathcal{X}_n$ étant fini l'existence de x_n est assurée.

- det est continue car polynomiale et $\mathcal{Y}_n$ est compact. Ces deux arguments assurent l'existence de y_n.

II.B.2) Si $A \in \mathcal{Y}_n$ alors $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} \\ 0 \; 0 & 1\end{pmatrix} \in \mathcal{Y}_{n+1}$ et $\det(\tilde{A}) = \det A$

donc $\det(\mathcal{Y}_{n+1}) \supset \det(\mathcal{Y}_n)$, ce qui prouve que la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

II.B.3) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 1 \\ 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\det(M) = \begin{vmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{vmatrix}$

On effectue l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + \dots + C_n$, qui ne change pas la ~~la~~ valeur du déterminant, puis $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour i allant de 2 à n, qui ne change pas non plus la valeur du déterminant.

On en déduit $\underline{\det M} = \begin{vmatrix} (n-1) & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & -1 \end{vmatrix} \underline{= (n-1)(-1)^{n-1}}$

On en déduit $\underline{y_{2n+1} \geq 2n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} y_{2n+1} = +\infty$.

Mais la suite $\underline{(y_n)_{n\geq 0}}$ est croissante, donc $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty}$

II.B.4) Soit N dans $\mathcal{Y}_n$, supposons qu'il existe i, j avec $n_{i,j} \in]0,1[$. Développons $\det N$ par rapport à la j-ième colonne.

$$\underline{\det N = (-1)^{i+j} n_{i,j} A_{i,j} + \sum_{k\neq i} (-1)^{k+j} n_{k,j} A_{k,j}}$$

, où les $A_{k,l}$ sont les mineurs obtenus en prenant le déterminant de la matrice N dans laquelle on supprime la k-ième ligne et la l-ième colonne.

$\underline{\text{Si } (-1)^{i+1} A_{i,j} \geq 0}$ en remplaçant $\underline{n_{i,j} \text{ par } 1}$ on obtient une matrice N' dans $\mathcal{Y}_n$ avec $\det N' \geq \det N$

$\underline{\text{Si } (-1)^{i+1} A_{i,j} < 0}$ on remplace $\underline{n_{i,j} \text{ par } 0}$.

En opérant successivement ainsi sur chacun des coefficients ~~de~~ d'une matrice N réalisant la valeur y_n on obtient une matrice N' de $\mathcal{X}_n$ telle que $x_n \geq \det N' \geq y_n$. Or $\mathcal{X}_n \subset \mathcal{Y}_n$ donc $x_n \leq y_n$.

et finalement $\underline{x_n = y_n}$.

III Matrices de permutations

III A Description de $\mathcal{P}_n$

III.A.1) u est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^n$ soi

i) $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|u(x)\| = \|x\|$

ou bien

ii) $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \quad (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$

Il est clair que ii) $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|u(x)\|^2 = \|x\|^2$ (faire $x=y$)

ii) $\Rightarrow$ i) (car $\forall x \ \|u(x)\| \geq 0 \quad \|x\| \geq 0$)

Réciproquement si $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|u(x)\| = \|x\|$ alors

$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \quad \|u(x+y)\|^2 = \|(x+y)\|^2$

$\|u(x)\|^2 + 2(u(x) \mid u(y)) + \|u(y)\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2$

$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \quad (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$.

III.A.2) Si $M \in O_n(\mathbb{R})$ $\quad {}^tMM = I_n$ donc $(\det M)^2 = 1$

donc $\det M = \pm 1$ (la réciproque est fausse $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \notin O_n(\mathbb{R})$.

III.A.3) + $P_\sigma = \left(\delta_{i,\sigma(j)} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

$${}^tP_\sigma P_\sigma = \left(\sum_{k=1}^{n} \delta_{k,\sigma(i)} \delta_{k,\sigma(j)} \right) = \left(\delta_{\sigma(i),\sigma(j)} \right) = I_n.$$

Donc $P_\sigma \in O_n(\mathbb{R})$. Il est clair que $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{X}_n$

donc $\mathcal{P}_n \subset O_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{X}_n$

+ Réciproquement, soit $P = (p_{i,j})$ dans $O_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{X}_n$.

On a $\forall j \ \sum_{i=1}^{n} p_{i,j}^2 = 1$ et $\forall i,j \ p_{i,j} \in \{0,1\}$.

Donc $\forall j \ \exists! \, i \ p_{i,j} = 1$. On peut donc définir σ en posant $i = \sigma(j)$. Pour la même raison, en considérant les lignes $\forall i \ \exists! \, j \ p_{i,j} = 1$. Donc $\sigma : [1,n] \to [1,n]$ est surjective et c'est une permutation. Donc $O_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{X}_n \subset \mathcal{P}_n$.

⑥

En conclusion $\underline{\mathcal{P}_n = O_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{K}_n \text{ et } \operatorname{card}(\mathcal{P}_n) = n!}$

III.B - Quelques propriétés des éléments de $\mathcal{P}_n$

III.B.1) + $P_\sigma = \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ $P_{\sigma'} = \left(\delta_{i,\sigma'(j)}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$

donc $P_\sigma P_{\sigma'} = \left(\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)}\,\delta_{k,\sigma'(j)}\right) = \left(\delta_{i,\sigma\sigma'(j)}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$

Par conséquent $\underline{P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma\sigma'}}$

+ $\underline{\mathbb{Z} \text{ est infini} \quad S_n \text{ est fini}}$ donc $k \mapsto \sigma^k$ n'est pas injective. Donc il existe $k < k'$ tel que $\sigma^k = \sigma^{k'}$, soit $\sigma^{k'-k} = Id_{\{1,\dots,n\}}$

On pose $\underline{N = k'-k}$.

Rq $k \mapsto \sigma^k$ est un morphisme de groupe, donc son noyau est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, non réduit à $\{0\}$ car elle n'est pas injective. On a donc le résultat plus précis: ~~$\exists N \in$~~

$\exists N \in \mathbb{N}^* \quad \sigma^k = Id \iff N \mid k.$

III.B.2) Tous les éléments de P_n sont annulés par un $X^N - 1$ qui est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. Ils sont donc diagonalisables

III.B.3) - $\mathcal{P}_2$ ne contient que les deux éléments $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

les vecteurs propres de $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ seront communs aux deux éléments. Ce sont les vecteurs $\begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-x\\x\end{pmatrix}$, associés respectivement aux valeurs propres 1 et -1. $(x \neq 0)$

- $\mathcal{P}_3$ contient les trois matrices $\underset{M_1}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}}$, $\underset{M_2}{\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$ et $\underset{M_3}{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}}$

Dont les valeurs propres sont 1 à l'ordre 2 et -1

$E_1(M_1) = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, y = z\right\}$ $E_{-1}(M_1) = \left\{\begin{pmatrix}0\\y\\-y\end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}\right\}$

On a un résultat similaire pour M_2 et M_3

Il en résulte que les seuls vecteurs propres communs à M_1, M_2 et M_3 sont les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$, $x \neq 0$.

Il est clair qu'un tel vecteur est vecteur propre de tous les éléments de P_3.

III.B.4 a) $u_\sigma(e_1 + \quad e_n) = e_{\sigma(1)} + \quad + e_{\sigma(n)} = e_1 + \quad + e_n$.

Donc $(e_1 + \cdots + e_n)$ est vecteur propre de u_σ (associé à la valeur propre 1. Donc D est stable par u_σ.

Par conséquent H est stable par u_σ car u_σ est orthogonal et $H = D^\perp$

Rq: On peut démontrer ce résultat directement

$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \in H \iff x_1 + \quad + x_n = 0$

$u_\sigma(x) = x_1 e_{\sigma(1)} + \quad + x_n e_{\sigma(n)} = x_{\sigma^{-1}(1)} e_1 + \quad + x_{\sigma^{-1}(n)} e_n$.

Or $x_1 + \cdot \cdot \cdot + x_n = x_{\sigma^{-1}(1)} + \quad + x_{\sigma^{-1}(n)}$.

III.B.4 b). V n'est pas contenu dans D donc il existe $x = x_1 e_1 + \quad + x_n e_n$ dans V et un couple (i,j) tel que $x_i \neq x_j$.

Soit $\sigma = (i,j)$ la transposition de i et j

$u_\sigma(x) - x = (x_i - x_j)(e_j - e_i)$. $\in V$ car V est stable

$(e_i - e_j)$ est dans V car $(x_i - x_j) \neq 0$ et V est un ~~sous~~ espace vectoriel.

Soit $k \neq i$ $k \neq j$ et σ la transposition (i,k)

alors $e_k - e_j = u_\sigma(e_i - e_j) \in V$.

III.B.4.c) les $(e_k - e_j)_{\substack{1\leq k\leq n \\ k\neq j}}$ sont dans H.

ils sont linéairement indépendants $\left(\sum_{k\neq j} \lambda_k (e_k - e_j) = \sum_{k\neq j} \lambda_k e_k - (\sum \lambda_k) e_j\right.$ donc $\left.\sum_{k\neq j} \lambda_k (e_k - e_j) = 0 \Rightarrow \forall k\neq j \ \lambda_k = 0\right)$. Ils engendrent donc H. Par conséquent $H \subset V$ et $H = V$ ou $\mathbb{R}^n = V$.

les seuls sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ stables par tous les u_σ, $\sigma \in S_n$, sont donc $\{0\}$, D, H et $\mathbb{R}^n$.

III.C Une caractérisation des éléments de P_n.

$\{M^k, k \in \mathbb{N}\}$ est fini, donc, comme III.B.1, il existe $N \geq 1$ tel que $M^N = I_n$. donc $M^{-1} = M^{N-1}$ et M^{-1} est donc à coefficients entiers. Notons $M^{-1} = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$

Or a $1 = \sum_{k=1}^{n} m_{j,k} a_{k,j}$ Donc pour tout j il existe un k_0 tel que $0 < m_{j,k_0} a_{k_0,j} \leq 1$. Comme les coefficients sont des entiers on a donc $m_{j,k_0} = 1$ $a_{k_0,j} = 1$, de plus comme $0 = \sum_{k=1}^{n} m_{j,k} a_{k,j'}$ si $j \neq j'$ on aura $a_{k_0,j'} = 0$. Donc l'application $j \to k_0$ est injective. c'est donc une bijection.

$\forall j \ \exists! k \quad a_{k,j} = 1$ et $\forall j' \neq j \quad a_{k,j'} = 0$

Dans chaque ligne de M^{-1} il y a un 1 et $n-1$ 0, donc M^{-1} (et donc M) est une matrice de permutation.

La réciproque est claire car si $M \in P_n$ $\forall k \ M^k \in M_n(\mathbb{N})$ et $M^{n!} = I_n$ donc $\{M^k, k \in \mathbb{N}\}$ est fini.

car $\sigma^{n!} = Id_{\{1,\dots,n\}}$ pour tout σ de S_n et $(P_\sigma)^k = P_{\sigma^k}$.

IV Matrices aléatoires de $\mathcal{X}_n$

IV.A.1) $(X_1 = \cdots = X_n) = (0 = X_1 = \cdots = X_n) \cup (1 = X_1 = \cdots = X_n)$ et ces deux évènements sont disjoints. Puisque les X_i sont indépendantes on aura $P(X_1 = \cdots = X_n) = p^n + q^n$.

IV.A.2) S est à valeurs dans $[0, n]$ et

$$(S_n = k) = \bigcup_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} \underbrace{(X_{i_\ell} = 1,\ X_i = 0 \text{ si } i \notin \{i_1, \ldots, i_k\})}_{\text{ces évènements sont disjoints et équiprobables}}$$

$$P(S_n = k) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

(on retrouve la loi binomiale)

IV.A.3) Clairement $P(X_{i,j} = 1) = p^2$ $P(X_{i,j} = 0) = 1 - p^2$

IV.A.4)a) $M(\omega) = (X_i(\omega) X_j(\omega)) \in M_n(\{0,1\}) = \mathcal{X}_n$

IV.A.4.b) * $\operatorname{tr}(M(\omega)) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2(\omega) \in [0, n]$

* $M(\omega)$ est symétrique réelle, donc diagonalisable.

* $\operatorname{Im}(M(\omega)) = \mathbb{R}\, U(\omega)$ donc $\operatorname{rg}(M(\omega)) \le 1$

IV.A.4c) $M(\omega)$ est symétrique, c'est la matrice d'une projection orthogonale si et seulement si c'est la matrice d'une projection c'est-à-dire si et seulement si $M^2(\omega) = M(\omega)$

Or $M^2(\omega) = U(\omega) \underbrace{{}^tU(\omega)\, U(\omega)}\, {}^tU(\omega)$

matrice 1×1 de coefficient $\sum_{i=1}^{n} X_i^2(\omega) = \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) = S(\omega)$

$M^2(\omega) = S(\omega) M(\omega)$.

Si $M(\omega) = 0$ alors $S(\omega) = 0$ et $M^2(\omega) = S(\omega) M(\omega)$

Si $M(\omega) \neq 0$ alors $M^2(\omega) = M(\omega) \iff S(\omega) = 1$.

Donc $M^2(\omega) = S(\omega) M(\omega) \iff S(\omega) \in \{0, 1\}$

IV.A.5). La loi de $tr(M)$ est la loi de S, c'est donc une loi binomiale et $E(tr(M)) = np$ $V(tr(M)) = npq$

- $rg(M) \in \{0,1\}$ et $rg(M)=0 \Leftrightarrow \forall i \; X_i = 0$, donc la loi de $rg(M)$ est une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(q^n)$.

$E(rg(M)) = 1-q^n$ $V(rg(M)) = q^n(1-q^n)$

IV.A.6) On a vu $M^2 = SM$ donc $M^k = S^k M$.

La suite $M^k_{(\omega)}$ converge ssi $M(\omega)=0$ ou $S(\omega) \in \{0,1\}$

or $M(\omega)=0$ ssi $S(\omega)=0$. Finalement

$(M^k_{(\omega)})_{k\geq 0}$ converge ssi $S(\omega) \in \{0;1\}$; et sa limite $L(\omega)$ vérifie $L^2(\omega) = L(\omega)$ (en passant à la limite dans $M^{2k} = (M^k)^2$)

donc $L(\omega)$ est la matrice d'un projecteur.

La probabilité pour que $(M^k(\omega))$ soit convergente est donc $q^n + npq^{n-1}$.

IV.A.6) $M^2 = SM$ donc $Sp(M) \subset \{0, S\}$.

Une condition nécessaire pour que M admette deux valeurs propres distinctes est $S \neq 0$.

Réciproquement : si $S \neq 0$, alors S est valeur propre de M de vecteur propre U par exemple $(U^tUU = U(^tUU) = SU)$

et 0 est valeur propre de M car $rg(M) \leq 1$ et $n \geq 2$, donc M admet bien deux valeurs propres distinctes.

$P(M \text{ a deux valeurs propres distinctes}) = 1 - q^n$.

IV B Génération par remplissage aléatoire

IV. B. 1.a

```
def Somme (M):
    n = len (M)
    temp=0
    for i in range (n):
        for j in range (n):
            temp = temp + M[i,j]
    return (temp)
```

IV. B. 1 b)

```
def Bernoulli (p):
    x = random()
    if x <= p :
        return (1)
    else:
        return (0)
```

IV B. 1c)

```
def Modifie (M,p):
    n = len(M)
    for i in range (n):
        for j in range (n):
            if (M[i,j] == 0) and (Bernoulli(p)==1):
                M[i,j] = 1
```

IV B. 1d)

```
def Simulation (n,p)
    M = zeros((n,n))
    k = 0
    m = n*n
    while Somme(M) != m:
        Modifie (M,p)
        k=k+1
    return (k)
```

IV.B.2) N_1 suit une loi $\mathcal{B}(n,p)$, donnant le nombre de réussite dans n épreuve de Bernoulli indépendantes

On s'intéresse à N_2 sachant $N_1 = i$ $\quad (0 \leq i \leq n)$
Il reste donc $n-i$ coefficients nuls et par conséquent
N_2 sachant $N_1 = i$ suit une loi $\mathcal{B}(n-i,p)$.
cette loi dépend de i, N_1 et N_2 ne sont donc pas indépendantes.

IV.B.3) $P(T_{i,j} = k) = q^{k-1} p$ (loi géométrique de paramètre p) C'est la loi de la première réussite dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même loi. (On peut la retrouver facilement car

$$(T_{i,j} = k) = (M^{\ell}[i,j] = 0,\ 1 \leq \ell \leq k-1) \cap (M^{k}[i,j] = 1)$$

IV.B.4) $P(T_{ij} \geq k) = \sum_{\ell=k}^{+\infty} q^{\ell-1} p = \dfrac{q^{k-1} p}{1-q} = q^{k-1}$

IV.B.5) - S_r représente le nombre de coefficients égaux à 1 après r modifications.
- $S_r = \operatorname{card}\{(i,j),\ T_{i,j} \leq r\}$. les $(T_{i,j} \leq r)$ ~~étant~~ indépendants et $S_r = \sum_{i,j} \mathbb{1}_{T_{i,j} \leq r}$, donc S_r est la somme de m épreuves de Bernoulli de paramètre $1-q^{r}$. S_r suit donc une loi $\mathcal{B}(m, 1-q^{r})$

IV.B.6 a)

```
def Esperance(n, p, nbTests):
    temp = 0
    for i in range(nbTests):
        temp= temp + Simulation(n,p)
    return (temp / nbTests)        # Attention à la division entière en 2.7
```

IV B.6b) $E(N) = \sum_{r=1}^{+\infty} r \Big(\underbrace{P(S_r = m) - P(S_{r-1} = m)}_{\text{Probabilité que la matrice soit complétée à l'étape } r} \Big)$

$$\underline{E(N) = \sum_{r=1}^{+\infty} r\left(\left(1-q^r\right)^m - \left(1-q^{r-1}\right)^m\right)}$$

Cette expression ne semble pas simplifiable.

pour $m=1$ on retrouve $\underline{E(N) = \frac{1}{p}}$

pour $m=2$ on obtient $E(N) = \frac{2}{1-q} - \frac{1}{1-q^2}$

et en général

$$\underline{E(N) = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} \binom{m}{i} \frac{1}{1-q^i}}$$

par exemple pour $n=2$, $m=4$

$$\underline{E(N) = \frac{4}{1-q} - \frac{6}{1-q^2} + \frac{4}{1-q^3} - \frac{1}{1-q^4}}$$

La valeur exacte pour $\underline{q = \frac{1}{2}}$ est $\underline{\frac{368}{105} \simeq 3{,}5048}$

Une simulation numérique avec $n = 100$ donne $3{,}43$

$n = 100000$ donne $3{,}5049$

$\underline{n = 10000000 \quad 3{,}5050}$