Concours CCS Mathématiques I 1989 MP

Première partie

I.1.a) Si (U_n) est constante égale à (a) alors
$a = \frac{1}{2}(a^2+a^2)$ donc $a=0$ ou 1. Réciproquement les suites constantes $(0)_{n\geqslant 0}$ et $(1)_{n\geqslant 1}$ sont clairement dans S.

I.1.b) Question mal posée. On ne sait pas s'il faut simplement restreindre l'ensemble des limites possible ou déterminer exactement l'ensemble des limites des éléments de S qui en possède une dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

- On remarque que $\forall n\in\mathbb{N}$ $U_n \geqslant 0$. Toute limite est dans $\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$
- Si (U_n) converge vers ℓ finie, alors par passage à la limite
$\ell = \frac{1}{2}(\ell^2+\ell^2)=\ell^2$ donc $\ell = 0$ ou 1.

ces cas peuvent se présenter pour les suites $(0)_{n\geqslant 0}$ et $(1)_{\geqslant 0}$

- Sinon la seule limite possible est $+\infty$.
Prenons $U_0=1$ $U_1=3$ alors $U_2=\frac{9+1}{2}=5$
$U_3=\frac{26}{2}=13\geqslant 7$ Montrons par récurrence que
$\forall n\in\mathbb{N}$ $U_n\geqslant 2n+1$. C'est vrai pour $0\leq n\leq 3$.
On le suppose vrai à l'ordre $(n-1)$ et (n) $(n\geqslant 3)$ alors
$U_{n+1}\geqslant \frac{1}{2}\left((2n+1)^2+(2n-1)\right)=2n^2+1=2n+3+\underbrace{2n(n-1)-2}_{\geqslant 10}\geqslant 2n+3.$

donc $\boxed{\ell=+\infty \text{ est possible}}$

$\boxed{\{\text{limites possibles}\}=\{0,1,+\infty\}}$

I.1c) Si $U_n = U_{n+1} = U_{n+2} = a$, alors $a = 0$ ou 1 (calcul déjà fait deux fois).

. Si $a = 0$ et $n \geq 1$ alors $0 = \frac{1}{2}(0^2 + U_{n-1}^2)$ donc $U_{n-1} = 0$ puis par récurrence descendante $U_0 = U_1 = 0$ donc $(U_n) = (0)_{n \geq 0}$

. Si $a = 1$ et $n \geq 1$ alors $1 = \frac{1}{2}(1 + U_{n-1}^2)$ donc $U_{n-1}^2 = 1$

or $\forall p \in \mathbb{N} \quad U_p \geq 0$. donc $U_{n-1} = 1$ et de même $(U_n) = (1)_{n \geq 0}$.

I.1.d) Si $U_n = U_{n-1} = 1$ alors $U_{n+1} = 1$ et d'après la question précédente $(U_n)_{n \geq 0} = (1)_{\geq 0}$

I.1.e) Si $U_n = 0$ avec $n \geq 2$ alors

$$0 = \frac{U_{n-1}^2 + U_{n-2}^2}{2} \quad \text{donc} \quad U_{n-1} = 0 \; (= U_{n-2}) \quad \text{et}$$

$U_{n-1} = U_n = U_{n-2} = 0$ donc $(U_n) = (0)_{n \geq 0}$

I.2a $(U_n)_{n \geq 0}$ est non constante, donc $U_n > 0$ pour $n \geq 2$.

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}(U_n^2 + U_{n-1}^2) - \frac{1}{2}(U_{n-1}^2 + U_{n-2}^2)$$

$$= \frac{1}{2}(U_n + U_{n-2})(U_n - U_{n-2})$$

Or $U_n + U_{n-2} > 0$ car $U_n \neq 0$. Donc $U_{n+1} - U_n$ et $U_n - U_{n-2}$ sont de même signe. (Rappel, à ne pas placer dans la copie, la fonction signe prend trois valeurs, -1 sur $\mathbb{R}^{*-}$, 0 en 0, 1 sur $\mathbb{R}^{*+}$)

I.2b) On suppose $U_{N+1} \geq U_N$ et $U_{N+1} \geq U_{N-1}$

alors d'après I.2.a) $U_{n+2} \geq U_{N+1}$ et

$U_{N+2} \geq U_{N+1}$ et $U_{N+2} \geq U_N$.

Par récurrence on aura donc $\forall p \geq N \quad U_{p+1} \geq U_p$

D'autre part si $U_{N+2} = U_N$ alors $U_{N+2} = U_{N+1} = U_N$, donc d'après I.1.c) (U_n) est constante ce qui est exclu.

Donc $U_{N+2} > U_N$ et par la conservation stricte du signe $U_{N+3} > U_{N+2} \geq U_{N+1}$ et on prouve par récurrence que $\boxed{(U_n)_{n \geq N+2} \text{ est strictement croissante}}$.

I.2.c . $U_0 = \sqrt{2}$ $\quad U_1 = 0$ $\quad U_2 = \frac{1}{2}(0+2) = 1$ $\quad U_3 = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}$

$U_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+1\right) = \frac{5}{8}$ $\quad U_5 = \frac{1}{2}\left(\frac{25}{64}+\frac{1}{4}\right) = \frac{41}{128} < \frac{1}{2} < \frac{5}{8}$

. $U_5 < U_4$ $\quad U_5 < U_3$, donc $(U_n)_{n \geq 5}$ est strictement décroissant minorée. Elle converge vers $\ell \in \{0,1\}$ avec $\ell \leq U_5$ donc $\boxed{U(\sqrt{2},0) = 0}$

. $U_0 = 2$ $\quad U_1 = 0$ $\quad U_2 = \frac{1}{2}(0+4) = 2$ $\quad U_3 = \frac{1}{2}(4+0) = 2$

$U_4 = \frac{1}{2}(4+4) = 4 > U_3 = U_2$.

$(U_n)_{n \geq 4}$ est strictement croissante, sa limite est infinie ou dans $[U_4, +\infty[$ et dans $\{0, 1, +\infty\}$

donc $\boxed{U(2,0) = +\infty}$

I.3) En prenant la contraposée des résultats précédents on a donc

$$\forall N \geq 1 \quad \min(U_N, U_{N-1}) < U_{N+1} < \max(U_N, U_{N-1})$$

Supposons $U_0 < U_1$ (on ne peut avoir $U_0 = U_1$) alors $U_0 < U_2 < U_1$ puis $U_2 < U_3 < U_1$. On démontre alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{2n} < U_{2n+2} < U_{2n+3} < U_{2n+1}$

(en effet $U_{2n+2} < U_{2n+4} < U_{2n+3}$ puis $U_{2n+4} < U_{2n+5} < U_{2n+3}$).

Donc $\begin{cases} (U_{2n})_{n\geq 0} \text{ est strictement croissante} \\ (U_{2n+1})_{n\geq 0} \text{ est strictement décroissante.} \end{cases}$

Le cas $U_0 > U_1$ est similaire.

Les suites $(U_{2n})_{n\geq 0}$ et $(U_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont monotones et bornées, car à valeurs dans $[\min(U_0, U_1), \max(U_0, U_1)]$ elles sont donc convergentes.

Soit $\ell_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} U_{2n}$ et $\ell_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} U_{2n+1}$, on a :

$$\left.\begin{array}{l} \ell_1 = \frac{1}{2}(\ell_1^2 + \ell_2^2) \\ \ell_2 = \frac{1}{2}(\ell_2^2 + \ell_1^2) \end{array}\right\} \text{ donc } \ell_1 = \ell_2 = \lim_{n\to+\infty} U_n.$$

et $\ell_1 = \ell_2 = 1$ (car $\ell_1 \geq \min(U_0, U_1) > 0$ et $\ell_2 \geq \min(U_0, U_1) > 0$)

I.4. Démontrons a) ⇒ b)

On suppose a). S'il existe N tel que $U_N = 1 = U_{N+1}$ on a vu que $(U_n)_{n\geq 0}$ est constante ce qui est exclu. On a donc $U_N > 1$ ou $U_{N+1} > 1$, ce qui implique $U_{N+2} > 1$.

On a donc $\forall n \geq N+2 \quad U_n > 1 \quad (\text{donc } U_n^2 > U_n)$

On en déduit $\forall n \geq N+2 \quad U_{n+2} > \min(U_n, U_{n+1}) \geq \min(U_{N+2}, U_{N+3}) = \alpha > 1$

Donc $\forall M \in \mathbb{N} \quad (U_n)_{n \geq M}$ ne peut être strictement décroissante

Deux cas sont alors possibles

Cas 1 : $\exists M \in \mathbb{N} \quad (U_n)_{n \geq M}$ est strictement croissante

cas 2 : $\forall M \in \mathbb{N} \quad (U_n)_{n \leq M}$ ~~ne~~ n'est pas strictemen croissante.

Dans le cas 1 on obtient b) donc a => b., il ne reste qu'à prouver que le cas 2 est impossible.

Dans le cas 2, on a vu en 1. 3) que $\lim_{n \to +\infty} U_n = 1$. C'est impossible car $\forall n \geq N+4 \quad U_n \geq \min(U_{N+2}, U_{N+3}) > 1$.

En conclusion : a => b

Montrons b => c

On suppose b) La suite $(U_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante à partir d'un certain rang. Elle ne peut donc tendre vers 0, elle tend donc vers 1 en $+\infty$.

Or si elle tend vers 1 on aura $\forall n \geq N \quad U_n < 1$

donc $U_{n+1} < \max(U_n, U_{n-1})$ ce qui contredit la stricte croissante. Donc $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.

c) => a) Résulte de la définition de $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$:

$\forall A \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \; U_n > A$, il suffit de prendre $A = 1$.

On a prouvé d) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ a) donc a), b) et c) sont équivalents

I.5) La démonstration est exactement la même en changeant le sens des inégalités et en remplaçant $+\infty$ par 0.

I.6) - On a déjà vu que E_0, E_1 et E_∞ ~~sont~~ vides..

- leur réunion est S, en effet si $(U_n)_{n\geq 0}$ est dans S soit

+ $\exists M$ $(U_n)_{n\geq M}$ est strictement croissante, et dans ce cas
$$(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E_\infty$$

+ $\exists M$ $(U_n)_{n\geq M}$ est strictement décroissante et dans ce cas $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_0$

+ $(U_n)_{n\geq 0}$ n'est pas constant et pour tout M. $(U_n)_{n\geq M}$ n'est ni strictement croissante, ni strictement décroissante, et dans ce cas
$$(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_1$$

+ $(U_n)_{n\geq 0} = (0)_{n\geq 0}$ $\quad (U_n)_{n\geq 0} \in E_0$

+ $(U_n)_{n\geq 0} = (1)_{n\geq 0}$ $\quad (U_n)_{n\geq 0} \in E_1$.

-