DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

****

I Suites et intégrales

A - Etude d'une intégrale à paramètre

Pour x dans $\mathbb{R}^+$ on pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt}\, dt$$

A.1) Montrer que f est définie et continue sur $[0, +\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

A.2) Déterminer les limites de f et f' en $+\infty$.

A.3) Exprimer f'' à l'aide des fonction usuelles et en déduire

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

A.4) Montrer

$$\begin{cases} \forall x > 0 \quad f(x) = x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2} \\ f(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

A.5) Montrer

$$\forall s \in \mathbb{R} \quad |s| = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos nt}{t^2} dt$$

B - Etude d'une intégrale à paramètre

Dans cette section, on étudie la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos t)^n}{t^2}\, dt$$

B.1) Justifier l'existence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et préciser la monotonie de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

B.2) Montrer que $u_1 = u_2 = \frac{\pi}{2}$.

C - Calcul d'un équivalent de u_n

C.1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} v_n \quad \text{avec} \quad v_n = \int_0^{+\infty} \frac{1-\Big(\cos(\sqrt{2u/n})\Big)^n}{u\sqrt{u}}\, du$$

C.2) Montrer que

$$\forall (n,u) \in \mathbb{N}^* \times]0,1], \quad |1 - \Big(\cos(\sqrt{2u/n})\Big)^n| \leq u$$

C.3) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite finie ℓ vérifiant

$$\ell = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-u}}{u\sqrt{u}}\, du$$

C.4) On admet la relation $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du = \sqrt{\pi}$.

Conclure que $u_n \sim \sqrt{\dfrac{n\pi}{2}}$.