

Exercice 3

Si $A \in M_n(\mathbb{Z})$ et $A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$ alors

$$A A^{-1} = I_n$$

$$\left. \begin{array}{l} (\det A) (\det A^{-1}) = 1 \\ \in \mathbb{Z} \quad \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \text{ donc } \underline{\det A = \pm 1}$$

Réciproquement.

si $\det(A) = \pm 1$ alors

$$\left. \begin{array}{l} A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t \text{com}(A) = \pm {}^t \text{com}(A) \in M_n(\mathbb{Z}) \end{array} \right\}$$

car les coefficients de $\text{com}(A)$ sont des polynômes en les coefficients de A , à coefficients de la forme $\varepsilon(\sigma)$ ($\varepsilon = \pm 1$).