Exercice 8 Soit $\overline{k}$, $0 \leq k \leq 35$ un élément de $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$. $\overline{k}$ est inversible ssi il existe $x = \overline{u}$ dans $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ $\overline{k}x = \overline{k}\overline{u} = \overline{k}\overline{u} = \overline{1}$.

$\overline{k} \in \left(\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}\right)^* \Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{Z} \quad \exists v \in \mathbb{Z} \quad ku = 1 + 36v$

$\Leftrightarrow \exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2 \quad ku + v36 = 1$

$\overline{k} \in \left(\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}\right)^* \Leftrightarrow pgcd(k,36) = 1$

Or $36 = 2^2 3^2$ donc $pgcd(k,36) = 1 \Leftrightarrow 2 \nmid k$ et $3 \nmid k$

On en déduit $\left(\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}\right)^* = \{ \overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{21}, \overline{25}, \overline{29}, \overline{31}, \overline{35} \}$

$\overline{19} = -\overline{17}$, $\overline{21} = -\overline{13}$, $\overline{25} = -\overline{11}$, $\overline{29} = -\overline{7}$, $\overline{31} = -\overline{5}$, $\overline{35} = -\overline{1}$

Donc $card\left(\left(\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}\right)^*\right) = 12$.

Remarque Il était tolérée une fois la caractérisation $k \wedge 36 = 1$ établie d'affirmer.

$card\left(\left(\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}\right)^*\right) = \varphi(36) = \varphi(4)\varphi(9)$ car $4 \wedge 9 = 1$

$= 2 \times (2 \times 3)$ (car $\varphi(p^\alpha) = (p-1)p^{\alpha-1}$)

$card\left(\left(\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}\right)^*\right) = 12$